

2007 年香港小學數學精英選拔賽

數學競賽題解

1. 解答： $(12 \times 10) \div (12 + 3) = 8$ 天。

2. 解答：1 號。如果被塗紅的最小日期數是個兩位數，則第一個沒被塗紅的數段必含有奇數個數字，而其餘沒被塗紅的數段都有偶數個數字，與“沒有塗紅的數段中所含的數字都一樣多”矛盾。所以被塗紅的最小日期數是個一位數。如果被塗紅的最小日期數是除 1 以外的一位數，那麼第一個沒被塗紅的數段所含的數字將不會超過 8 個，四個沒被塗紅的數段再加上被塗紅所含的數字不會超過 $8 \times 4 + 5 = 37$ 個。可是 28 天的月份也含有 47 個數字，矛盾。所以被塗紅的最小日期數是 1 號。(註：在 28 天的月中，被塗紅的三天是 1, 13, 21 號；在 29 天的月中，被塗紅的三天是 1, 17, 29 號；在 31 天的月中，被塗紅的三天是 1, 14, 23 號或 1, 18, 31 號。在 30 天的月中沒有符合題意的塗法。)

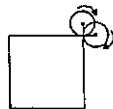
3. 解答： $(334 \times 6 + n + 335 \times 6 - n) \div 2 = 2007$ 冊。

4. 解答：見下表，可看出在 9 秒的時間裏乙比甲每秒少走的和多走的距離相抵消，甲、乙兩車走的路程相同。因此軌道長為 $9 \times 5 \times 2 = 90$ 厘米。

	第 1 秒	第 2 秒	第 3 秒	第 4 秒	第 5 秒	第 6 秒	第 7 秒	第 8 秒	第 9 秒
甲車每秒行的距離	5	5	5	5	5	5	5	5	5
乙車每秒行的距離	1	2	3	4	5	6	7	8	9
甲、乙每秒的距離	乙少 4	乙少 3	乙少 2	乙少 1	0	乙多 1	乙多 2	乙多 3	乙多 4

5. 解答：每個座位都有相鄰的左右兩個位置，因此要達到題目要求，以入座的兩人之間最多空 2 個位置，而頭或尾也可空一個位置，可求出入座人數至少為 $(2008 - 1) \div 3 + 1 = 670$ 人。

6. 解答：圓在每一邊上滾動 2007 圈，在四條邊上共滾動 $4 \times 2007 = 8028$ 圈，在每個角上轉動 90° (見下圖)，四個角剛好 1 圈，所以共轉動 $8028 + 1 = 8029$ 圈。



7. 解答：現在工效是 $(1 + 20\%) \times 85\% = 1.02$ ， $167 \div [10\% + (1 - 10\%) \div 1.02] = 170$ 天。

8. 解答：右圖中 AC 的長度是 BC 的 $\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$ ，所以 $AB = 20 \times (1 - \frac{2}{5}) = 12$ 厘米。

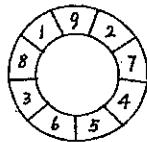


9. 解答：已知甲的速度是乙的 1.5 倍，則甲每走 3 份乙走 2 份，將 A、B 間等分為 5 份，甲、乙相遇情況如下圖：



A、B 兩地的距離為 $300 \div 2 \times 5 = 750$ 米。

10. 解答：要使 9 個差的和最大，就希望 9 個被減數盡量大，9 個減數盡量小。比如最大的數 9 的兩旁應填最小的數 1 和第二小的數 2，第二大的數 8 應與 1 相鄰，再與 3 相鄰，第三大的數 7 應與 2 相鄰，再與 4 相鄰，第四大的數 6 應與 3 相鄰，剩下的 5 填在 4、6 之間的格中（如下圖）。從直覺可知，這樣構造的差就盡量大了，它們的總和是 $(9-1) + (9-2) + (8-1) + (8-3) + (7-2) + (7-4) + (6-3) + (6-5) + (5-4) = (9+8+7+6) \times 2 + 5 - 5 - (1+2+3+4) \times 2 = 40$ 。



11. 解答：設實際有 x 人參賽。根據題意，少了的 645 盤是沒來的 10 人分別與參賽 x 人各未下一盤，再加上這 10 人之間未下的 $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ 盤。可列方程： $10x+45=645$ ，解得 $x=60$ 名。

12. 解答：2 名。甲、乙、丙三類學生中分別有 2 人、15 人、10 人挖樹坑，可完成挖樹坑的任務，且使樹苗運得最多，最多為 260 棵。

這三類學生挖樹坑的相對效率分別是：甲類： $\frac{\text{挖樹坑}}{\text{運樹苗}} = \frac{2}{20} = 0.1$ ；

乙類： $\frac{\text{挖樹坑}}{\text{運樹苗}} = \frac{1.2}{10} = 0.12$ ；

丙類： $\frac{\text{挖樹坑}}{\text{運樹苗}} = \frac{0.8}{7} = 0.114$ 。

由上可知，乙類學生挖樹坑的相對效率最高，其次是丙類學生，故應先安排乙類學生挖樹坑，可挖 $1.2 \times 15 = 18$ 個。再安排丙類學生挖樹坑，可挖 $0.8 \times 10 = 8$ 個。還差 $30 - 18 - 8 = 4$ 個樹坑，由兩名甲類學生去挖，這樣就能完成挖樹坑的任務，其餘 13 名甲類學生運樹苗，可以運 $13 \times 20 = 260$ 棵。

13. 解答：第 10 天結束時，蝸牛在井底處，如果將第 11 天重新記為第 1 天，由題意，第 1 天爬 1 厘米，第 2 天爬 2 厘米，……，第 n 天爬上 n 厘米。

$$1+2+3+\cdots+n \geq 2007$$

$$\frac{(1+n)n}{2} \geq 2007$$

$$n(n+1) \geq 4014$$

由 $62 \times 63 = 3906 < 4014 < 63 \times 64 = 4032$ ，得到 $n=63$ 。加上前面的 10 天，至少需要 73 天。

14. 解答：若第一次取出球的編號為 n ，則有 $n+n \times 2+n \times 2 \times 2=7n$ ，三次取出的 9 個球的編號之和必是 7 的倍數。因為 10 個球的編號之和是 55，所以取出的 9 個球，編號之和必在 45~54 之間，期間只有 49 是 7 的倍數，所以未取出的球的編號為 $55-49=6$ 。

15. 解答：下圖中正方形 B 的一個頂點位於正方形 A 的中心。圖中兩個陰影部分面積相等，所以兩個正方形重疊的部分正好是 $\frac{1}{4}$ 個正方形。當每個正方形只與順序相鄰的正方形重疊，而不與順序不相鄰的正方形重疊時，2007 張紙片覆蓋的面積最大，是 $2007 - \frac{1}{4} \times 2006 = 1505.5$ 平方厘米。

