

2010 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解：原式 $= (111111+222222+\cdots+666666) \div 7 = 111111 \times (1+2+\cdots+6) \div 7 = 111111 \times (21 \div 7) = 333333$

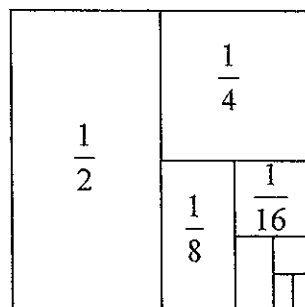
2. 解：原式 $= (2010-1949+19) \times \frac{3}{8} = 30$

3. 解：由已知 $\underbrace{20102010\cdots2010}_{n\text{個}2010}15$ 一定是 5 的倍數，若此數能被 55 整除，則它必能被 11 整除，各偶位數字和與奇位數字和之差，即 $[(2+1)n+1] - [(0+0)n+5] = 3n+1-5$ ，當 $n=5$ 時， $3n-4$ 是 11 的倍數，所以 n 的最小值為 5。

4. 解：分析原式 $= \overline{AAAAA} + \overline{BBBB} + \overline{CCC} + \overline{DD} + E = 15085$ ，得知 $A=1$ ， $B=3$ 或 4，試驗得 $B=3$ ， $C=6$ 或 5，試驗得 $C=5$ ， $D=7$ 、8 或 9，試驗得 $D=7$ ， $E=9$ 。 $\therefore \overline{ABCDE} = 13579$

5. 解： $13824 = 24 \times 24 \times 24$ ， $24 \times 24 \times 6 = 3456$ （平方厘米）。

6. 解：數形結合分析（如右圖），得知，原式為面積為 1 的正方形第十次等分後的一半部分的值，即 $\frac{1}{1024}$ 。



7. 解：設 $\frac{1}{30} + \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} = a$ ， $\frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} = b$ ，

那麼 $a - b = \frac{1}{30}$ ，則原式

$$= a(b + \frac{1}{67}) - (a + \frac{1}{67})b = ab + \frac{1}{67}a - ab - \frac{1}{67}b = \frac{1}{67}(a - b) = \frac{1}{67} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{2010}$$

8. 解：利用 10 條線段的總和找解題切入點，設 $AB=a$ ， $BC=b$ ， $CD=c$ ， $DE=d$ ，可得 10 條線段的和為 $4a+6b+6c+4d$ ，已知，所有線段總和為 21.18cm。

9. 解：求積的各個數位上的數字和，應先把積算出來，這個數與它自身相乘，有

$$\begin{aligned} & \underbrace{999\dots99}_{2010\text{個}9} \times \underbrace{999\dots99}_{2010\text{個}9} \\ &= \underbrace{999\dots99}_{2010\text{個}9} \times (\underbrace{1000\dots00}_{2010\text{個}0} - 1) \\ &= \underbrace{999\dots99000\dots00}_{2010\text{個}9 \quad 2010\text{個}0} - \underbrace{999\dots99}_{2010\text{個}9} \\ &= \underbrace{999\dots998000\dots001}_{2009\text{個}9 \quad 2009\text{個}0} \end{aligned}$$

積的數字和為 $9 \times 2009 + 8 + 1 = 18090$ 。

10. 解：設所填 8 個數之和為 S ，每個數出現在三個面上，共 6 個面，則 $3S = 6 \times 18$ ， $S = 36$ ，未被填上的數字是 $(1+2+\dots+9) - 36 = 9$ 。

11. 解：設原七個正整數的平均數為 x 。由於 x 的最後一位算錯，則 $21.795 \leq x \leq 21.894$ ， $152.565 \leq 7x \leq 153.258$ ，因為 $7x$ 為七個正整數之和，正確答案是 $153 \div 7 \approx 21.86$ 。

12. 解：原式 $= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ ，根據題意得 $1 - \frac{1}{n+1} > \frac{1949}{2010}$ ，解 $n > 31\frac{58}{61}$ ，所以 n 的最小值為 32。

13. 解：因為 $S_{\triangle EFB} + S_{\triangle HGD} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle AHG} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AHD}$ ，

$$\text{又 } S_{\triangle AEF} + S_{\triangle AHG} = \frac{1}{2} S_{\text{長方形 EFGH}} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12 \text{cm}^2，$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADH} = 12 - 8 = 4 \text{cm}^2，$$

$$\text{又 } S_{\text{四邊形 ABCD}} = S_{\triangle ECH} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ADH} = \frac{1}{4} S_{\text{長方形 EFGH}} - 4 = \frac{1}{4} \times 4 \times 6 - 4 = 2 \text{cm}^2$$

14. 解：由觀察知，同時出現在兩列數中的數為：1，11，21， $\dots$ ，2011，事實上我們將已知的第一列數依次每 5 個作為一組，即：1，3，5，7，9；11，13，15，17，19； $\dots$ ，將第二列數依次每 2 個數作為一組，即：1，6；11，16； $\dots$ ，那麼相應的組中就有一個相同的數。共有 202 個。

15.解：

這問題相當於找出 $2010!$ 有多少個 0 作結尾。

先找出最大的 n ，使得 5^n 能整除 $2010!$ 。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2010}{5} \right] + \left[\frac{2010}{5^2} \right] + \left[\frac{2010}{5^3} \right] + \left[\frac{2010}{5^4} \right] \\ &= 402 + 80 + 16 + 3 = 501 \\ & \text{即是共有 501 個「5」}。 \end{aligned}$$

$[x]$ 代表 x 的整數部份，因為 $\frac{2010}{5^5} < 1$ 。所以最後一項是 $\left[\frac{2010}{5^4} \right]$ 。

再計算最大的整數 n ，使得 2^n 能整除 $2010!$ 。

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2010}{2} \right] + \left[\frac{2010}{2^2} \right] + \left[\frac{2010}{2^3} \right] + \left[\frac{2010}{2^4} \right] + \dots + \left[\frac{2010}{2^{10}} \right] \\ &= 1005 + 502 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2002 \\ & \text{即是共有 2002 個「2」}。 \end{aligned}$$

因為有 501 個「2」和「5」組成「0」，所以還有 $2002 - 501 = 1501$ 個「2」餘下來。
這些「2」得出非「0」的數字。

在 $10!$ 的積中，不計算 2 和 5 的因數，有
 $3 \times 3 \times 7 \times 9 = 7 \pmod{10}$

在 $2010!$ 中第一個非「0」的尾數是 $7^{201} \times 2^{1501} = 7 \times 2 = 4 \pmod{10}$
{因為 $7^4 = 1$ 和 $2^5 = 2 \pmod{10}$ }

所以答案是 4。

(賽後修訂)