

2011 香港小學數學精英選拔賽 計算競賽題解

1. 解：5998。

$$\begin{aligned}
 & 3000 + \frac{3000}{1+2} + \frac{3000}{1+2+3} + \frac{3000}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{3000}{1+2+3+\cdots+2998+2999} \\
 &= 3000 \times \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+2998+2999} \right) \\
 &= 3000 \times \left(1 + \frac{2}{2(1+2)} + \frac{2}{3(1+3)} + \frac{2}{4(1+4)} + \cdots + \frac{2}{2999(1+2999)} \right) \\
 &= 3000 \times \left(1 + 2 \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{2999 \times 3000} \right) \right) \\
 &= 3000 \times \left(1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2999} - \frac{1}{3000} \right) \right) \\
 &= 3000 \times \left(1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3000} \right) \right) \\
 &= 5998
 \end{aligned}$$

2. 解：12。

可以得知 $\frac{12}{13} + \frac{129}{130} + \frac{1299}{1300} + \cdots + \frac{1299999999999999}{13000000000000} > \underbrace{\frac{12}{13} + \frac{12}{13} + \frac{12}{13} + \cdots + \frac{12}{13}}_{13 \text{ 項}} > 12$ ，且

$$\frac{12}{13} + \frac{129}{130} + \frac{1299}{1300} + \cdots + \frac{1299999999999999}{13000000000000} < \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{13 \text{ 項}} = 13，\text{所求為 } 12。$$

3. 解：5 種。可知 $1000-13=987$ 為 N 的倍數。因 $987=3 \times 7 \times 47$ 且 1、3、7 皆小於 13，故 N 之值有 $2^3-3=5$ 種可能，即 21、47、141、329、987 五種可能。

4. 解：480 個。因最簡真分數的分子小於分母且與分母互質，故此即求 1 到 1155 中，與 1155 互質的數之個數。因 $1155=3 \times 5 \times 7 \times 11$ ，故 1 到 1155 中，3 的倍數有 $\frac{1155}{3}=385$ 個、5 的倍數有 $\frac{1155}{5}=231$ 個、7 的倍數有 $\frac{1155}{7}=165$ 個、11 的倍數有 $\frac{1155}{11}=105$ 個、15 的倍數有 $\frac{1155}{15}=77$ 個、21 的倍數有 $\frac{1155}{21}=55$ 個、33 的倍數有 $\frac{1155}{33}=35$ 個、35 的倍數有 $\frac{1155}{35}=33$ 個、55 的倍數有 $\frac{1155}{55}=21$ 個、77 的倍數有 $\frac{1155}{77}=15$ 個、105 的倍數有 $\frac{1155}{105}=11$ 個、165 的倍數有 $\frac{1155}{165}=7$ 個、231 的倍數有 $\frac{1155}{231}=5$ 個、385 的倍數有 $\frac{1155}{385}=3$ 個，1155 的倍數有 1 個，即 1 到 1155 中與 1155 互質的數有 $1155-385-231-165-105-77-55-35-21-15-11-7-5-3+1=480$ 個。

5. 解：100011248。設前四位數碼為 $a、b、c、d$ ，其中 $a \neq 0$ ，則第五位數碼開始，依序為 $a+b+c+d、a+2b+2c+2d、2a+3b+4c+4d、4a+6b+7c+8d、8a+12b+14c+15d$ ，若繼續下去，第十位數碼為 $15a+23b+27c+29d$ ，該數恆大於 10，不合。因此香港數最大為九位數，且發生在 $a=1、b=c=d=0$ 時，即 100011248。

6. 解：201108600。因 6、7、8、9、10、11 的最小公倍數為 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11=27720$ ，而前四位為 2011 的九位數之最小值為 $201100000=27720 \times 7254 + 19120$ ，故知 $27720 \times 7255=201108600$ 為滿足題意的最小九位數。

7. 解：91。因為 $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ 是為正整數，要使最小數 a_1 達到最大值，故有 $a_1, a_1+1 \leq a_2, a_1+2 \leq a_3, \dots, a_1+19 \leq a_{20}$ ，將上述 20 個不等式相加，得 $20a_1+190 \leq 2014$ ， $a_1 \leq 91$ ，故最小數 a_1 的最大值為 91。

8. 解：1111110

原式

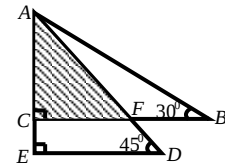
$$\begin{aligned}
 &= (1000000 - \frac{1}{9}) + (100000 - \frac{1}{9}) + (10000 - \frac{1}{9}) + (1000 - \frac{1}{9}) + (100 - \frac{1}{9}) + (10 - \frac{1}{9}) + \frac{2}{3} \\
 &= 1111110 - \frac{6}{9} + \frac{2}{3} \\
 &= 1111110
 \end{aligned}$$

9. 解：2022060

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (2011 \times 2010 - 2010 \times 2009) + (2009 \times 2008 - 2008 \times 2007) + \cdots + (5 \times 4 - 4 \times 3) + (3 \times 2 - 2 \times 1) \\
 &= 2 \times 2010 + 2 \times 2008 + \cdots + 2 \times 4 + 2 \times 2 \\
 &= 2 \times (2010 + 2008 + \cdots + 4 + 2) \\
 &= 2022060
 \end{aligned}$$

10. 解：24.5 cm²

如圖，在直角三角形 ABC 中，AB=14， $\angle B=30^\circ$ ，所以 $AC=\frac{1}{2}AB=7$ ，又 $\angle E=\angle ACB=90^\circ$ ，得 $CB \parallel ED$ ，所以 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形， $AC=CF=7$ ， $S_{\text{陰}}=\frac{1}{2}AC \cdot CF=\frac{1}{2} \times 7 \times 7=24.5$ (cm²)。



11. 解：73 個。第一個正方形被挖去 1 個小正方形；第二個正方形在原來基礎上又被挖去 8 個小正方形，共被挖去 1+8 個小正方形；第三個正方形在第二個正方形基礎上又被挖去 8² 個小正方形，共被挖去 1+8+8²=73 個正方形。

12. 解：1.25

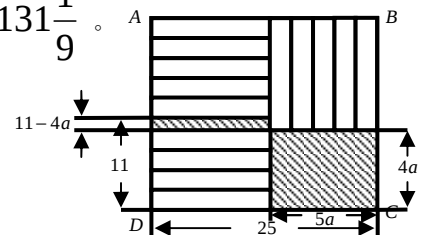
原式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2012 \times \frac{7}{8} \times \frac{11}{3} - 2011 \times \frac{7}{8} \times \frac{11}{3}}{(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}) \times 17} \times \frac{85}{32} \\
 &= \frac{\frac{11}{3}}{\frac{11}{24} \times 17} \times \frac{85}{32} \\
 &= \frac{8}{17} \times \frac{85}{32} \\
 &= \frac{5}{4} = 1.25
 \end{aligned}$$

13. 解：131 $\frac{1}{9}$

將圖中小長方形作適當移動，如圖，設每個小長方形的寬為 a ，那麼長為 $(25-5a)$ ，圖中兩部分陰影圖形的長、寬如圖知 $11-4a$ ， $25-5a$ 和 $4a$ ， $5a$ ，陰影部分的面積為長方形 ABCD 的面積減去 14 個小長方形的面積和，即 $25 \times (11+5a) - 14 \times a \times (25-5a) = 4a \times 5a + (11 -$

$4a)(25-5a)$ ，解，得 $a=\frac{7}{3}$ ，所以 $S_{\text{陰}}=131\frac{1}{9}$ 。



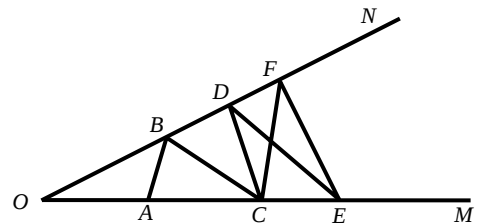
14. 解：1509

設 $OA=a$ ， $OB=b$ ， $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle BAC}$ 所以 $AC=a$ ， $S_{\triangle OCB}:S_{\triangle BCD}=2$

所以 $BD=\frac{1}{2}b$ ， $S_{\triangle DCE}:S_{\triangle OCD}=1:3$ ，所以 $CE=\frac{2}{3}a$

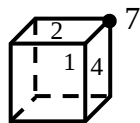
$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle OED}=1:4$ ，所以 $DF=\frac{1}{4}OD=\frac{1}{4}(b+\frac{b}{2})=\frac{3}{8}b$

故 $\frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{DF}{BD} = \frac{\frac{3}{8}b}{\frac{b}{2}} = \frac{3}{4}$ ，因為 $S_{\triangle CBD}=2012$ ，所以 $S_{\triangle CDF}=1509$ 。



15. 解：7

折疊後的正方體如圖



其中上、下兩面數字分別是 2、5，左、右兩面的數字分別是 6、4，前、後兩面的數字分別是 3、1，易得頂點數字和最小值是 7。