

2012 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

(7/3/2012 修訂版)

1. 解：0

原式

$$\begin{aligned} &= 199\frac{5}{7} \times 299\frac{4}{7} \times 301\frac{3}{7} \times 401\frac{2}{7} \times (199\frac{5}{7} - 299\frac{4}{7} - 301\frac{3}{7} + 401\frac{2}{7}) \\ &= 199\frac{5}{7} \times 299\frac{4}{7} \times 301\frac{3}{7} \times 401\frac{2}{7} \times (199\frac{5}{7} + 401\frac{2}{7} - 299\frac{4}{7} - 301\frac{3}{7}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. 解：3

因 $5!$ 之後都是 10 的倍數，所以 $1!+2!+3!+\dots+2011!$ 的末位數即為 $1!+2!+3!+4!$ 的末位數，而 $1+2+6+24=33$ ，故末位數為 3。

3. 解：100

由規定運算知， $x * 2012 = (x+1) + (x+2) + \dots + (x+2012)$

$$\text{即， } 2226278 = 2012x + (1+2+\dots+2012)$$

$$2226278 = 2012x + \frac{(1+2012) \times 2012}{2}$$

解，得 $x=100$ 。

4. 解： $\frac{59}{5}$

將已知數列分組， $(\frac{1}{1}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{1}), \dots, (\frac{1}{k}, \frac{2}{k-1}, \frac{3}{k-2}, \dots, \frac{k}{1}), \dots$

由 $1+2+3+\dots+k=2012$ ，即 $\frac{(1+k)k}{2}=2012$

當 $k=62$ 時， $1+2+3+\dots+62=1953$

當 $k=63$ 時， $1+2+3+\dots+63=2016$

另知數列 $(\frac{1}{1}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{1}), \dots, (\frac{1}{63}, \frac{2}{62}, \frac{3}{61}, \dots, \frac{59}{5}, \frac{60}{4}, \frac{61}{3}, \frac{62}{2}, \frac{63}{1})$ 共 2016 項，那麼這個數列的第 2012 項為 $\frac{59}{5}$ 。

5. 解： $\frac{2009}{999}$

令 $S = 2.\dot{0}1\dot{1}$ ，則知 $1000S = 2011.\dot{0}1\dot{1}$ ，故 $999S = 2009$ ，即 $S = \frac{2009}{999}$ 。

6. 解： $\frac{231}{458}$

可知 $1 \times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2+2-A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5-A} = \frac{3}{4}$ ，故 $\frac{1}{5-A} = \frac{1}{4}$ ，因此 $A=1$ 。此時便可得知

$$10 \times 20 = \frac{10}{20} + \frac{1}{10+20+200-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{229} = \frac{231}{458}。$$

7. 解：6

第二行或列按 2 的倍數連續排列，第三行或列按 3 的倍數連續排列，依此類推，...， $2012=2 \times 2 \times 503$ ，（而第一行的數 2012，恰好是第 2012 列的第一個數，故表格中 2012 出現的次數只有 6 次）那麼 2012 會在第 1，2，4，503，1006，2012 行出現，共 6 次。

8. 解：27

$42380 \div$ “香”=“數學精英”，由被除數尾數是 0，且商為四位數，則可用“香” $\div 5、6、8$ 試除，易知“香”=5。“數，學，精，英”分別為 8，4，7，6。又由 $8476 \times$ “港”=76“啊”84，易知“港”=9，所以“香+港+精+英”=27。

9. 解：32

如圖，分割正方形，設最小的等腰直角三角形為面積 a ，則大正方形的面積為 $18a=6^2=36$ ，小正方形為 $16a=32$ ，所以小正方形面積為 32。



10. 解： 26cm^2

觀察圖形知，兩個三角形是全等的，重疊部分是公共的，那麼每一個三角形不重疊的部分是相等的，即所求的陰影部分的面積等於四邊形 ABEH 的面積。而根據題意知四邊形 ABEH 為直角梯形， $AB=8\text{cm}$ ， $BE=4\text{cm}$ ， $DH=3\text{cm}$ ，又 $DE=AB$ ，所以 $HE=8\text{cm}-3\text{cm}=5\text{cm}$ ，所以四邊形 ABEH 的面積為 $\frac{1}{2} \times (8+5) \times 4 = 26\text{cm}^2$ 。

11. 解：15.4 或 $15\frac{2}{5}$

仔細觀察圖形可以看到，所要求的陰影部分的面積就是兩個半圓面積的和減去直角三角形的面積，即，

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times AC \right)^2 \times \pi + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times BC \right)^2 \times \pi - \frac{1}{2} \times BC \times AC = 2 \times 3.14 + 8 \times 3.14 - 16 = 15.4$$

12. 解： $47\frac{5}{32}$ 或 47.15625

由已知的點都是它所在的邊的中點，則有陰影三角形是內接正方形的三角形的面積的 $\frac{1}{4}$ ，內接正方形的三角形面積是正方形的 $\frac{3}{8}$ ，最小正方形面積是次大正方形的 $\frac{1}{2}$ ， S_{Δ} 是大正方形的 $\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{128}$ ，

即陰影面積為 $2012 \times \frac{3}{128} = 47\frac{5}{32}$ 。

13. 解：200

依題意列表分析，尋找規律：

錢數 \ 分類本數	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	...
5 角	3	8	5	2	7	4	9	6	3	8	5	...
8 角	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	...

易發現 8 角的本數隨錢數的遞增而有週期規律變化，一個週期內有 5 個數：3，0，2，4，1 共 10 本，於是所有這 100 人共購買每本 8 角練習本為 $10 \times (100 \div 5) = 200$ （本）。

14. 解：500 天

因 6、8、9 的最小公倍數為 72，故可知三人每 72 天會在同一天去借書；但因要求需仍在星期三同天借書，故再考慮 72 與 7 的最小公倍數，即 504 天。因今天為星期日，已經過了 4 天，所以需 500 天後三人才會同時在星期三去圖書館借書。

15. 解：62

因已知總平均為 80，故若將每一個數皆視為 80 時，可知第一組數的總和必增加 $80 \times 20 - 1264 = 336$ ，此即為第二組數的總和減少的量，由此知第二組數一共有 $336 \div (88 - 80) = 42$ 個數，兩組合計 $20 + 42 = 62$ 個數。