2013 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解：3.33

原式 $=0.333\times2\times1.2+0.666\times3.8=0.666\times1.2+0.666\times3.8$

$=0.666\times(1.2+3.8)=0.666\times5=3.33$

2. 解：111100000

$$
\begin{aligned}
&9876\times9876+9876\times1234+11110\times124\\
&=9876\times(9876+1234)+11110\times124\\
&=9876\times11110+11110\times124\\
&=11110\times(9876+124)\\
&=11110\times10000\\
&=111100000
\end{aligned}
$$

3. 解：2497

設已知 22 個連續整數為 m，m＋1，m＋2，…，m＋21。
①有 $m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+21)=2013$。
它後面緊接的 22 個連續自然數應為 m＋22，m＋23，m＋24，…，m＋43。

所以①緊接在這 22 個數後面的那 22 個連續整數的和爲
$(m+22)+(m+23)+(m+24)+\cdots+(m+43)=2013+22\times22=2497$。

4. 解：1006

$$\frac{2012^2}{2013}-\frac{2011^2}{2013}+\frac{2010^2}{2013}-\frac{2009^2}{2013}+\cdots+\frac{2^2}{2013}-\frac{1^2}{2013}$$

$$=\frac{1}{2013}\times\left(\left(2012^2-2011^2\right)+\left(2010^2-2009^2\right)+\cdots+\left(2^2-1^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2013}\times(2012+2011+2010+2009+\cdots+2+1)$$

$$=\frac{1}{2013}\times\frac{2012\times(2012+1)}{2}$$

$=1006$

5. 解：$2034\frac{1}{2}$

$$\frac{271}{314}\times2013+\frac{43}{314}\times2170$$

$$=\frac{271}{314}\times2013+\frac{43}{314}\times2013+\frac{43}{314}\times157$$

$$=2013\times\left(\frac{271}{314}+\frac{43}{314}\right)+\frac{43}{2}$$

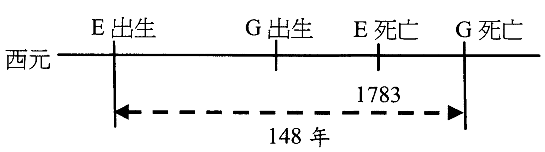
$$=2034\frac{1}{2}$$

6. 解：27^0

因為 AB＝AD，$\angle BAD=72^0$，所以，$\angle ABD=\angle ADB=(180^0-72^0)\div2=54^0$，又 DA＝DC，
故 $\angle C=\angle CAD=54^0\div2=27^0$。

7. 解：西元 1777 年

由圖可知 Gauss 出生該年與 Euler 死亡之年相差 154－148＝6 年，故 Gauss 出生於西元 1777 年。



8. 解：S=1012539

設 $S=\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5})+...+(\frac{1}{2013}+\frac{2}{2013}+...+\frac{2011}{2013}+\frac{2012}{2013})$，

又 $S=\frac{1}{2}+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})+(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5})+...+(\frac{2012}{2013}+\frac{2011}{2013}+...+\frac{2}{2013}+\frac{1}{2013})$，

相加得，$2S=1+2+3+4...+2010+2011+2012$，

又 $2S=2012+2011+2010+...+4+3+2+1$，

相加得，$4S=2013\times2012=4050156$，故 $S=1012539$。

9. 解：2

可判斷出 $\underbrace{2012\times2012\times\cdots\times2012}_{2013\text{ 個}}$ 的個位數是由 2012 的個位數 2 所決定的。

觀察規律，因 2 = 2、2×2=4、2×2×2=8、2×2×2×2=16、2×2×2×2×2=32，故可判斷出接下來的數之個位數爲 2、4、8、6 這四個數的循環出現。因 2013=4×503+1，故知 $\underbrace{2012\times2012\times\cdots\times2012}_{2013\text{ 個}}$ 的個位數與 2 = 2 的個位數相同，即 2。

10. 解： 長=1344mm、闊=672mm、高=336mm

設圖（1）中陰影小正方形的邊長爲 x mm，則長方體盒子的闊爲$(2016\div2)-x=1008-x$，根據題意，得 $1008-x=2x$，解得 $x=336$，所以長方體盒子的長爲 $2016-2x=1344$（mm），闊爲 672mm，高爲 336mm，所以，長方體盒子的長、闊、高分別是 1344mm、672mm、336mm。

11. 解：33

因 d 爲 a_1、a_2、…、a_{60} 的最大公因數且 $a_1+a_2+...+a_{60}=2013$，故知 d 必爲 2013 的因數。令 $a_k=db_k$，其中 $1\le k\le60$ 。

因 a_1、a_2、…、a_{60} 皆爲正整數，故知 b_1、b_2、…、b_{60} 也必爲正整數，因此 $b_1+b_2+...+b_{60}\ge60$ 。

因 $d(b_1+b_2+...+b_{60})=2013=3\times11\times61$，故知 $b_1+b_2+...+b_{60}$ 至少爲 61，也因此 d 可能的最大值爲 33。

12. 解：28028

由小正方形的面積爲 $196=14^2$，設長方形左上方兩個相同正方形的邊長爲 x，則六個正方形的邊長從小到大依次爲：14，x，x，$x+14$，$x+14+14$，$x+14+14+14$。則由長方形的上下兩邊相等有 $x+x+(x+14)=(x+28)+(x+42)$，$x=56$。於是，長方形的長和闊分別爲 $x+x+(x+14)=182$，$x+(x+42)=154$，故長方形面積爲 $182\times154=28028$。

13. 解：1

根據從第三個數開始，每個數都恰好等於它前面兩個數之和可得：

第 12 個數 － 第 11 個數 =第 10 個數；第 11 個數－第 10 個數＝第 9 個數；…；第 3 個數－第 2 個數＝第 1 個數。

即 2013－1244＝769；1244－769＝475；769－475＝294；475－294＝181；294－181＝113；181－113＝68；113－68＝45；68－45＝23；45－23＝22；23－22＝1。那麼第一個數是 1。

14. 解：2 種

可知每一組的連續非負整數之和爲 364÷4=91=1×91=7×13。

此問題等價於有多少種方式將 91 表示爲二個以上連續正整數之和。

若有奇數個連續正整數，則總和恰爲中間數的倍數，故：

若此組連續正整數中間數爲 91，則共有 1 個，不合；

若此組連續正整數中間數爲 1，則共有 91 個，即必取到負數，不合；

若此組連續正整數中間數爲 13，則共有 7 個，即取 10、11、12、13、14、15、16；

若此組連續正整數中間數爲 7，則共有 13 個，即取 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13，此即爲撲克牌所使用之方式。

若有偶數個連續正整數，則總和恰爲中間二數之和的倍數，故：

若此組連續正整數中間二數之和爲 91，則共有 1×2=2 個，即取 45、46；

若此組連續正整數中間二數之和爲 1，即中間二數爲 0、1，不合；

若此組連續正整數中間二數之和 13，則共有 7×2=14 個且中間二數爲 6、7，即需取 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13，不合；

若此組連續正整數中間二數之和 7，則共有 13×2=26 個且中間二數爲 3、4，即必取到負數，不合。

因此一共還有 2 種：10、11、12、13、14、15、16 與 45、46。

15. 解：$\frac{1}{8}\text{cm}^2$

由 AC＝1.5BC，AD＝0.5BC，所以 CD＝BC。即△BCD 爲等腰直角三角形，四個等腰直角△BCD 可以拼成以 BD 爲邊的一個正方形，由 BD＝1，所以△BDC 的面積爲 $\frac{1}{4}$ ，而△ABD 與△BDC 是等高，但底 AD＝0.5BC＝0.5CD，所以△ABD 的面積爲△BDC 面積的 $\frac{1}{2}$ ，即△ABD 面積爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\text{cm}^2$。

~全卷完~