2015 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解：5000

觀察可發現 $a+a^2=a\times(a+1)$，故有

$$\frac{1015\times2015}{203+203^2}+\frac{1015\times2015}{204+204^2}+\frac{1015\times2015}{205+205^2}+\cdots+\frac{1015\times2015}{402+402^2}=1015\times2015\times\left(\frac{1}{203\times204}+\frac{1}{204\times205}+\cdots+\frac{1}{402\times403}\right)$$

$$=1015\times2015\times\left(\frac{1}{203}-\frac{1}{204}+\frac{1}{204}-\frac{1}{205}+\cdots+\frac{1}{402}-\frac{1}{403}\right)$$

$$=1015\times2015\times\left(\frac{1}{203}-\frac{1}{403}\right)$$

$$=5\times2015-5\times1015$$

$$=5000$$

2. 解：2015

原式$=\left(\frac{2015}{7}+\frac{2015}{11}+\frac{2015}{17}+\frac{2015}{23}\right)\div\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}\right)=2015\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}\right)\div\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}\right)=2015$

3. 解：101

$$\frac{808}{24}+\frac{808}{40}+\frac{808}{60}+\frac{808}{84}+\frac{808}{112}+\frac{808}{144}+\frac{808}{180}+\frac{808}{220}+\frac{808}{264}$$

$$=202\times\left[\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{28}\right)+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}\right)+\left(\frac{1}{55}+\frac{1}{66}\right)\right]$$

$$=202\times\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)\right]$$

$$=202\times\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right]$$

$$=202\times\frac{1}{2}$$

$$=101$$

4. 解：2877

可知所求爲四位數，故觀察將 48 分解爲四個數碼的乘積之表示法：

$1\times1\times6\times8$、$1\times2\times3\times8$、$1\times2\times4\times6$、$1\times3\times4\times4$、$2\times2\times2\times6$、$2\times2\times3\times4$

其中滿足數碼和爲 12 且小於 2015 的數爲 $1\times3\times4\times4$，故可能的數有 1344、1434、1443，而不可被 7 整除的數爲 1434 與 1443，其和爲 2877。

5. 解：1

設已知五位數是 $\overline{20BCA}$，有 20000+100B+10C+A-(2+B+C+A)=19998+9×(11B+C)，則 $\overline{2015A}$ 是 9 的倍數，得 A=1，

則 A 是數字 1。

6. 解：1492

若這兩個三位數分別爲 a 與 b，則由 $555555=3\times5\times7\times11\times13\times37=555\times1001$ 可知 a 與 b 都介於 555 與 1001 之間。因 $3\times5\times7=101$ 而 $3\times5\times7\times11=1155$，故可不妨假設 3、5、7 中有二數爲 a 的因數，第三數爲 b 的因數。

(i) 若 3、5 是 a 的因數而 7 是 b 的因數，則因 $3\times5\times37=555$，可得 $a\geq3\times5\times11\times13>1000$ 即 a 是四位數，矛盾；

(ii) 若 5、7 是 a 的因數而 3 是 b 的因數，則因 $5\times7\times13=455$，可得 $a\geq5\times7\times37>1000$ 即 a 是四位數，矛盾；

(iii) 若 3、7 是 a 的因數而 5 是 b 的因數，則因 $3\times7\times13=273$，且 $3\times7\times37=777\leq a<1000<3\times7\times11\times13$，可得 $a=3\times7\times37=777$，故 $b=5\times11\times13=715$。

因此這兩個三位數之和爲 $777+715=1492$。

7. 解：6044

可知最小的保良數與 3 相乘之後所得的乘積一定也是所有的保良數與 3 相乘之後所得的最小乘積，因此可判斷出這個乘積的首位數碼是大於或等於 3 的偶數，不妨先假設爲 4。而因 3 的倍數的數碼和一定也是 3 的倍數，故所有首位數碼爲 4 的 2015 位數中，最小的 3 的倍數的數爲 $4\underbrace{0\cdots0}_{2013個0}2$，且 $4\underbrace{0\cdots0}_{2013個0}2=3\times1\underbrace{3\cdots3}_{2013個3}4$，故可以判斷出最小的保良數即爲 $1\underbrace{3\cdots3}_{2013個3}4$，

其數碼和是 $1+3\times2013+4=6044$。

《補充資料以＊顯示》

＊ 8. 解：4 (cm^2)

由 F 是 EC 的中點，得 $S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}$，$S_{\triangle DFC}=\frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$，

則 $S_{\triangle OFB}=\frac{1}{2}S_{\triangle BFD}=\frac{1}{2}(S_{\triangle BCD}-S_{\triangle BFC}-S_{\triangle DFC})$

$$=\frac{1}{2}\times(S_{\triangle BCD}-\frac{1}{2}S_{\triangle BCD}-\frac{1}{4}S_{\triangle BCD})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}S_{\triangle BCD})$$

$$=\frac{1}{8}S_{\triangle BCD}$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{8^2}{2}=4\ (cm^2)。$$

9. 解：31209 (盒)

觀察分析圖形有，“↑”豎向的火柴棒有 2015×1998=4025970， “→”橫向的火柴棒有 2016×1997=4025952，
共有火柴棒 8051922 根，所以，需要每盒裝 258 根的火柴棍 8051922÷258=31209 盒。

10. 解：231 (箱)

因剩下的三輛貨車內蘋果的總箱數恰爲梨子總箱數的二倍，故可推知這三輛貨車所裝載的水果總箱數恰爲 3 的倍數。
而 231 = 3 × 77、251 = 3 × 83 + 2、257 = 3 × 85 + 2、326 = 3 × 108 + 2，故可判斷出僅可能 251 + 257 + 326 爲 3 的倍數，
即第一輛貨車內裝有 231 箱水果。

11. 解：4199 (立方單位)

由棱長之和 196 知，長＋寬＋高＝196÷4＝49．要使長方體的體積最大，則盡可能讓長、寬、高的值比較接近．經試算知，
當長爲 19，寬和高分別爲 17、13 時，則這個長方體的體積至多是 4199（立方單位）。

12. 解：1000 (枚)

觀察可知第 1 個箱子內放第 1 個奇數、第 2 個箱子內放接下來的 2 個奇數、第 3 個箱子內放接下來的 3 個奇數、第 4 個
箱子內放接下來的 4 個奇數、…，以此類推，因此可知前 9 號箱子共用放了前$1+2+3+\cdots+9=\frac{(1+9)\times 9}{2}=45$ 個奇數，即
第 10 個箱子內放了第 46 個奇數到第 55 個奇數的總和的金幣數。

因第 46 個奇數爲 $2\times 46-1=91$ 、第 55 個奇數爲 $2\times 55-1=109$ ，故第 10 個箱子內共裝有$\frac{(91+109)\times 10}{2}=1000$ 枚金幣，它
是最多金幣的箱子。

13. 解：8001

若令這個四位數是 $\overline{abcd}$ ，則由題意知 $\overline{abcd}+16000000=A^2$ ，其中 A 爲正整數，即 $\overline{abcd}=(A-4000)(A+4000)$ ，可知
$A>4000$ ， $A+4000>8000$。此時由 $\overline{abcd}$ 爲四位數可判斷出 $A-4000=1$，即 A=4001。再因 $\overline{abcd}=(A-4000)(A+4000)$，可
知 $\overline{abcd}=8001$ 。

14. 解：$\frac{1}{4}$a (cm^2) ／0.25 a (cm^2)

由 D、E、F 分別爲 BC、AD、CE 的中點得，$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}a$，$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$， $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$，所以，$S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

則 $S_{\triangle EFB}=\frac{1}{2}S_{\triangle BEC}=\frac{1}{4}$a (cm^2) ／0.25 a (cm^2) 。

15. 解：算式和有 2014，第 1007 項算式和是 2014

觀察知，這列算式的第一個加數是 2，0，1，5 的迴圈，第二個加數是奇數 1，3，5，7，…，由第一個加數的迴圈知，
第 1005 項的第一個加數是 2，第二個加數是 2009，按規律排下去，0＋2011，1＋2013，5＋2015，2＋2017，…，所以，
算式和有 2014，第 1007 項算式和是 2014。

~全卷完~

《補充資料以＊顯示》