2017 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解：433585425

$$\begin{aligned} ABABAB &= AB\times 10000 + AB\times 100 + AB \\ CDCD &= CD\times 100 + CD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ ABABAB\times CDCD &= (AB\times 10000 + AB\times 100 + AB)\times(CD\times 100 + CD) \\ &= AB\times 10000\times CD\times 100 + AB\times 10000\times CD + AB\times 100\times CD\times 100 + AB\times 100\times CD \quad + AB\times CD\times 100 + AB\times CD \\ &= AB\times CD\times 1000000 + 2\times AB\times CD\times 10000 + 2\times AB\times CD\times 100 + AB\times CD \\ &= 425000000 + 8500000 + 85000 + 425 \\ &= 433585425 \end{aligned}$$

2. 解：23

根據題意，“美”只可是 1。“會”≥ 2，要使“美”、“麗”、“香”和“港”所代表的數字之和取最大值，那麼試取“麗”= 8 或 7。
當“麗”= 8 時，“會”= 2，而“香港＋更好”= 17，但這是不可能的。
故取“麗”= 7。但為了“香港＋更好”≠ 17，則“會”= 2，而“香港＋更好”= 117。所以“港＋好”= 3 + 4 或 8 + 9。
因為有關數字之和要取最大值，所以取“港”= 9 及 “好”= 8，便得“香”= 6 及“更”= 4。
因此，美”、“麗”、“香”和“港”所代表的數字之和 ＝1 + 7 + 6 + 9 = 23 為所求的最大值。

3. 解：$\frac{278}{495}$

$$\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3}}}}} = \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{\frac{11}{3}}}}} = \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{6}{11}}}} = \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{2}{\frac{39}{11}}}} = \frac{2}{3+\frac{2}{3+\frac{22}{39}}} = \frac{2}{3+\frac{2}{\frac{139}{39}}} = \frac{2}{3+\frac{78}{139}} = \frac{2}{3+\frac{78}{139}} = \frac{2}{\frac{495}{139}} = \frac{278}{495}$$

4. 解：10101000000

$$\begin{aligned} 10101\times 333334 + 373737\times 18018 &= 10101\times(333334 + 37\times 18018) \\ &= 10101\times(333334 + 666666) \\ &= 10101000000 \end{aligned}$$

5. 解：$\frac{1}{35}$

$$\frac{1\times 2\times 3 + 11\times 22\times 33 + 111\times 222\times 333 + 1111\times 2222\times 3333}{5\times 6\times 7 + 55\times 66\times 77 + 555\times 666\times 777 + 5555\times 6666\times 7777}$$
$$=\frac{1\times2\times3(1+11\times11\times11+111\times111\times111+1111\times1111\times1111)}{5\times6\times7(1+11\times11\times11+111\times111\times111+1111\times1111\times1111)}$$
$$=\frac{1\times2\times3}{5\times6\times7}$$
$$=\frac{1}{35}$$

6. 解：11: 01: 45

因一小時共有 60 × 60 = 3 600 秒，而 12345 = 3600 × 3 + 1545，可知收到下一則訊息為 3 小時又 1 545 秒後。再因 1545 = 60 × 25 + 45，故可知收到下一則訊息之時間為 3 小時 25 分 45 秒後，即 11 時 01 分 45 秒，亦即11: 01: 45 (以「24 小時報時制」表示)。

7. 解：2017

要求 5 個整數之和是最小，則需每個整數取值最小。
已知任意 3 個相鄰的整數之和都不小於 1210，則可考慮 5 × (任意 3 個相鄰的整數之和) ≥ 5 × 1210 = 6050，而此時每個整數都計算了三次，所以此時 5 個整數之和 ≥ 6050 ÷ 3 = $2016\frac{2}{3}$，即圓圈上 5 個整數之和的最小值為 2017。
（可以給出一組整數：404，403，403，404，403）

8. 解：402

因三個質數之和是偶數，而需要它們的積是最小，因此這三個質數中必有偶質數 2。
另兩個質數之和是 70。兩個質數之和是 70 的情況共有 70 = 3 + 67 = 11 + 59 = 17 + 53 = 23 + 47 = 29 + 41。
已知兩數之和是固定時，它們的差越大，它們的積則越小。因此這三個質數的積最小是 2 × 3 × 67 = 402。

9. 解：391

可推斷出前六個奇數要盡可能小，而後五個奇數要盡可能互相接近。
已知前六個奇數之和至少為 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36，故後五個奇數之和最大為2017 − 36 = 1981。
觀察連續的五個奇數之和如下：
391 + 393 + 395 + 397 + 399 = 1975 < 1981 < 1985 = 393 + 395 + 397 + 399 + 401
從上可推斷出後五個奇數依序為391、393、397、399、401(36 + 391 + 393 + 397 + 399 + 401 = 2017) 。
因此由小至大的第七個奇數是 391。

10. 解：4061

從乘法直式的直觀分析：

$$\begin{array}{r} \underbrace{222\cdots2222}_{2017\text{ 個 }2} \\ \times \qquad\qquad 2017 \\ \hline 1\underbrace{555\cdots555}_{2016\text{ 個}5}4 \\ \underbrace{222\cdots2222}_{2017\text{ 個}2}\quad \\ \underbrace{444\cdots4444}_{2017\text{ 個}4}\qquad \\ \hline 448\underbrace{22\cdots22}_{2013\text{ 個 }2}1774 \end{array}$$

各數位上的數字之和為 $4+4+8+2\times2013+1+7+7+4=4061$。因此 $2017\times N$ 內所有的數字之和是 4061。

11. 解：89

因 $96\times21=2016$，所以不能有多於 95 個寫有數“21”的玻璃球。

從最多的入手分析，如有 95 個寫有數“21”的玻璃球時，這些玻璃球上的數之和為 $95\times21=1995$。$2017-1995=22$。

使用「試誤」的方法，逐一減少寫有數“21”的玻璃球，當減少 6 個寫有數“21”的玻璃球時，即減少 $6\times21=126$，

得出 $126+22=148=1\times23+5\times25$，即有 $89\times21+1\times23+5\times25=2017$。因此最多有 89 個寫有數“21”的玻璃球。

12. 解：2701 / 7021

已知$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

根據題意，$\frac{n(n+1)}{2}$ 是一個由 2、0、1 和 7 這四個數字組成的四位數，而個位數字是 1，所以$\frac{n(n+1)}{2}$ 只有 4 個可能：

(a) $\frac{n(n+1)}{2}=2071$，即 $n(n+1)=4142$，亦即兩個連續的整數相乘是 4142

(b) $\frac{n(n+1)}{2}=2701$，即 $n(n+1)=5402$，亦即兩個連續的整數相乘是 5402

(c) $\frac{n(n+1)}{2}=7021$，即 $n(n+1)=14042$，亦即兩個連續的整數相乘是 14042

(d) $\frac{n(n+1)}{2}=7201$，即 $n(n+1)=14402$，亦即兩個連續的整數相乘是 14402

使用「試誤」的方法，得出只有 $73\times74=5402$ 及 $118\times119=14042$。因此這個四位數是 2701 或 7021。

13. 解：9852017(最大值)，1032017(最小值)

$N=abc2017=abc\times10000+2017$，$10003=7\times1429$ 是 7 的倍數。

N可寫成 $N=abc\times10000+3abc-3abc+2017=abc\times100003+2017-3abc$

要使 N是 7 的倍數，$(2017-3abc)$亦要是 7 的倍數。由於a、b及 c互不相同，當$abc=102$ 時為最小值，

可是 7 不能整除$(2017-3\times102)$，但當$abc=103$ 時，7 能整除$(2017-3\times103)$。

因此N 的最小值為 $103\times100003+2017-3\times103=1032017$。當$abc=987$ 時為最大值，可是 7 不能整除

$(2017-3\times987)$，但當$abc=985$ 時，7 能整除$(2017-3\times985)$。

因此N的最大值為 $985\times100003+2017-3\times985=9852017$。

14. 解：372cm

可知最大的四分之一圓的半徑為 21×3 cm = 63 cm。現可將所有陰影區域的周界之總和分成五個部分來計算如下：

(a) 最大的四分之一圓之弧長 $=\frac{1}{4}\times2\times\frac{22}{7}\times63cm=99cm$

(b) 最大的四分之一圓的半徑與小的四分之一圓的半徑的差 $=(63-21)cm=42cm$

(c) 全圓之周界 $=2\times\frac{22}{7}\times21cm=132cm$

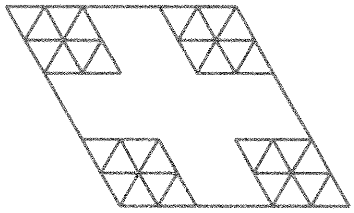
(d) 半圓之弧長 $=\frac{1}{2}\times2\times\frac{22}{7}\times21cm=66cm$

(e) 小的四分之一圓的弧長$=\frac{1}{4}\times2\times\frac{22}{7}\times21cm=33cm$

因此所有陰影區域的周界之總和 $=(99+42+132+66+33)$ cm = 372 cm。

15. 解：90cm

可推斷出拼法如下圖所示，且其四個內角中有兩個內角為$60°$、另兩個內角為$120°$，否則無法恰好被等邊三角形來拼出。



若設平行四邊形的一條邊長有x個等邊三角形、相鄰的另一條邊上有y個等邊三角形，則可推斷出三角形的個數恰好為平行四邊形相鄰兩邊上等邊三角形數目之乘積的 2 倍，因此$2xy=1000$，即得

$xy=500=1\times500=2\times250=4\times125=5\times100=10\times50=20\times25$

因平行四邊形的周界為$2(x+y)$，且兩數的乘積固定時，兩數之和的最小值會發生在這兩個數最接近的時候，因此得平行四邊形的周界之最小可能值 $=2(20+25)cm=90cm$

~全卷完~