2018 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解：33

$20.18\times\frac{11}{7}+\frac{11}{50}\times\frac{41}{7}=\frac{11}{7}\times(20.18+\frac{41}{50})$

$=\frac{11}{7}\times(20.18+0.82)$

$=\frac{11}{7}\times 21$

$=33$

2. 解：2.85

$1+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{3}\div(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\div\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{5}]=1+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{3}\div\frac{1}{12}\div\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{5}]$

$=1+\frac{1}{2}\times[\frac{1}{3}\times 12\times 7\times\frac{1}{8}+\frac{1}{5}]$

$=1+\frac{1}{2}\times[\frac{7}{2}+\frac{1}{5}]$

$=1+\frac{1}{2}\times\frac{37}{10}$

$=1+1.85$

$=2.85$

3. 解：15

$18=1\times2\times9$ 或 $18=1\times3\times6$ 或 $18=2\times3\times3$

若這個三位數的三個數字是 1、2 和 9，即有 6 個這樣的三位數。

若這個三位數的三個數字是 1、3 和 6，即有 6 個這樣的三位數。

若這個三位數的三個數字是 2、3 和 3，即有 3 個這樣的三位數。

∴ 共有 15 (= 6 + 6 + 3)個這樣的三位數。

4. 解：8

若所有數字不相同，用數字 2，0，1 和 8 組成的四位數有：

<u>1028</u>，1082，<u>1208</u>，<u>1280</u>，1802，<u>1820</u>

2018，2081，<u>2108</u>，<u>2180</u>，2801，2810

<u>8012</u>，8021，8102，<u>8120</u>，8201，8210

當中能被 4 整除的只有 1208，2108，8012，1820，8120，1028，1280 和 2180 共 8 個。

5. 解：7291

第一項 ＝8

第二項 － 第一項 $=23-8=15$

第三項 － 第二項 $=68-23=45=3\times15$

第四項 － 第三項 $=203-68=135=3\times3\times15$

第五項 － 第四項 $=608-203=405=3\times3\times3\times15$

由此類推，$A-608=3\times3\times3\times3\times15=1215$，即 $A=608+1215=1823$

$B-A=3\times3\times3\times3\times3\times15=3645$，即 $B=A+3645=1823+3645=5468$

$\therefore A+B=1823+5468=7291$

6. 解：104936

最小而各個數字都不同的六位數是 102 345。

因為 $102\ 345 \div 2018 = 50\ \ldots 1445$，所以

第一個能被 2018 整除的六位數是 $50 \times 2018 = 100\ 900$，不適合因有相同數字；

第二個能被 2018 整除的六位數是 $100\ 900 + 2018 = 102\ 918$，不適合因有相同數字；

第三個能被 2018 整除的六位數是 $102\ 918 + 2018 = 104\ 936$，適合因所有數字不同。

∴ 能被 2018 整除的最小六位數而六個數字都不相同的是 104936。

7. 解：2018

原來的四位數是一個整數。從產生的小數和原來的四位數之和是 2038.18 得知小數點是加在原來的四位數的百位和十位之間。

設原來的四位數是 x，則產生的小數是 $0.01x$。

$$\begin{aligned} \therefore \quad x + 0.01x &= 2038.18 \\ 1.01x &= 2038.18 \\ x &= 2038.18 \div 1.01 \\ &= 2018 \end{aligned}$$

∴ 原來的四位數是 2018。

8. 解：2034

$$N = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + (10000-1) + \ldots + (\underbrace{1000\ldots\ldots000}_{2018\text{ 個 }0} - 1)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{11111\ldots\ldots11111}_{2018\text{ 個 }1}0 - 2018 \\ &= \underbrace{111\ldots\ldots111}_{2014\text{ 個 }1}00000 + 11110 - 2018 \\ &= \underbrace{111\ldots\ldots111}_{2014\text{ 個 }1}00000 + 9092 \\ &= \underbrace{111\ldots\ldots111}_{2014\text{ 個 }1}09092 \end{aligned}$$

∴ N 的所有數字包括 2014 個 1、兩個 0、兩個 9 和一個 2，即

N 的所有數字之和 $= 2014 + 9 + 9 + 2 = 2034$

9. 解：20.182(取至三位小數)

設這 88 個正整數的和為 S。

當求這 88 個正整數的平均數時，取至兩位小數的結果是 20.18，即

$$20.175 < \frac{S}{88} < 20.185$$

$$88 \times 20.175 < S < 88 \times 20.185$$

$$1775.4 < S < 1776.28$$

$$\therefore \quad S = 1776$$

$$\frac{S}{88} = \frac{1776}{88} = 20.18181818\ldots = 20.182\ (\text{取至三位小數})$$

∴ 當求這 88 個正整數的平均數時，取至三位小數的結果是 20.182。

10.解：5374

已知 M = 1、2、3 或 4，而 N = 1、2、3、…、2016 或 2017。

若 M = 1 時，由 M 和 N 形成的最簡不同值的真分數有$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、…、$\frac{1}{2016}$ 和 $\frac{1}{2017}$，共有 2016 個。

若 M = 2 時，由 M 和 N 形成的最簡不同值的真分數有$\frac{2}{3}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{2}{7}$、…、$\frac{2}{2015}$ 和 $\frac{2}{2017}$，共有$(\frac{2016}{2}-1+1)$個，即 1008 個。

若 M = 3 時，由 M 和 N 形成的最簡不同值的真分數有 $\frac{3}{4}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{3}{10}$、$\frac{3}{11}$、…、$\frac{3}{2014}$、$\frac{3}{2015}$ 和 $\frac{2}{2017}$，

共有 $(2016\times\frac{2}{3}-2+1)$個，即 1343 個。

若 M = 4 時，由 M 和 N 組成的最簡不同值的真分數有$\frac{4}{5}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{4}{9}$、…、$\frac{4}{2015}$ 和 $\frac{4}{2017}$，共有$(\frac{2016}{2}-2+1)$個，即 1007 個。

∴ 共有最簡不同值的真分數(2016 + 1008 + 1343 + 1007)個，即 5374 個。

11.解：4342

列加法的直式如下。

$$\left.\begin{array}{r} 2018 \\ 20182018 \\ 201820182018 \\ \vdots \\ +\quad 2018\ldots\ldots 2018201820182018 \end{array}\right\}2018\text{ 層}$$
$$2018\ldots\ldots\ldots\ldots????$$

A 的首 4 個數字組成的四位數是 2018。

A 的最尾 4 個數字與 2018 個 8、2018 個 10 和 2018 個 2000 的總和的最尾 4 個數字相同。

$8\times2018+10\times2018+2000\times2018=16\,144+20\,180+4\,036\,000=4\,072\,324$

∴ A 的最尾 4 個數字組成的四位數是 2324。

∴ A 的首 4 個數字組成的四位數和最尾 4 個數字組成的四位數之和 $=2018+2324=4342$

12.解：259

$1820=2\times2\times5\times7\times13=2^2\times5\times7\times13$

∴ $1820^2=2^4\times5^2\times7^2\times13^2$

因 a、b、c 和 d 之間任何兩個都沒有公因數，而 $abcd=1820^2=2^4\times5^2\times7^2\times13^2$，

∴ $a=2^4=16$，$b=5^2=25$，$c=7^2=49$ 和 $d=13^2=169$

∴ $a+b+c+d=16+25+49+169=259$

13.解：1978

因 N + 17 是 7 的倍數，得出 $N+17=7x$，其中 x 是一個整數。

因 N − 18 是 8 的倍數，得出 $N-18=8y$，其中 y 是一個整數。

∴ $y=\frac{N-18}{8}=\frac{7x-17-18}{8}=\frac{7x-35}{8}=\frac{8x-32-x-3}{8}=x-4-\frac{x+3}{8}$

因 N < 2018，則 $7x-17<2018$

$7x<2035$

$x<290.71\ldots$

∴ $x=290$，或 289，或 288，或 287，或 286，或 285，……

因 $y=x-4-\frac{x+3}{8}$ 是一整數，要使 $N=7x-17$ 取最大值，

我們選 x 的最大值使 $\frac{x+3}{8}$ 是一整數。

(續前題)

13. 代 $x = 290$ 入 $\frac{x+3}{8}$，得出的不是整數；

代 $x = 289$ 入 $\frac{x+3}{8}$，得出的不是整數；

⋮

代 $x = 285$ 入 $\frac{x+3}{8}$，得出的是整數。

$\therefore$ 當 $x = 285$ 時，N 的最大值是 $7 \times 285 - 17 = 1978$。

14. 解：3899

一位數 8 是 8 的第 1 個倍數，而四位數 8072 $(= 8 \times 1009)$ 是 8 的第 1009 個倍數。

我們把 8 的首 1009 個倍數分成四組，第一組是一位數，第二組是兩位數，第三組是三位數，而第四組是四位數。

第一組 8 的倍數只有 8，共 1 個，即總共有 1 個數字。

第二組 8 的倍數有 16 $(= 8 \times 2)$，24，32，...，96 $(= 8 \times 12)$，共 11 個，
即總共有 22 $(= 2 \times 11)$個數字。

第三組 8 的倍數有 104 $(= 8 \times 13)$，112，120，...，992 $(= 8 \times 124)$，共 112 個，
即總共有 336 $(= 3 \times 112)$個數字。

第四組 8 的倍數有 1000 $(= 8 \times 125)$，1008，1016，...，8072 $(= 8 \times 1009)$，共 885 個，即總共有 3540 $(= 4 \times 885)$個數字。

$\therefore$ 8162432...80648072 共有數字 $(1 + 22 + 336 + 3540) = 3899$ 個

15. 解：36972018

因 $\underline{abcd2018} = \underline{abcd} \times 10000 + 2018$，而 $10001 = 73 \times 137$，即

$N = \underline{abcd2018} = abcd \times 10000 + 2018 = \underline{abcd} \times 10001 - (\underline{abcd} - 2018)$

若 N 是 73 的倍數，則 $\underline{abcd} - 2018$ 也需是 73 的倍數。

因 a、b、c 和 d 互不相同，且均不等於數字 2、0、1 和 8，則 $\underline{abcd}$ 的最小值是 3456。

但 $3456 - 2018 = 1438$ 不是 73 的倍數$(1438 \div 73 = 19.69\ldots)$。

現設 $\underline{abcd} - 2018 = x$，其中 x 是 73 的倍數，即 $\underline{abcd} = x + 2018$。

我們由 $x = 73 \times 20$ 開始測試 $\underline{abcd} = x + 2018$ 的各個數字能否滿足指定的條件，即 a、b、c 和 d 互不相同，且均不等於數字 2、0、1 和 8：

$73 \times 20 + 2018 = 3478$，不滿足指定條件

$73 \times 21 + 2018 = 3551$，不滿足指定條件

$73 \times 22 + 2018 = 3624$，不滿足指定條件

$73 \times 23 + 2018 = 3697$，滿足指定條件

$\therefore N\ (= \underline{\text{abcd2018}})$ 的最小值是 36972018。