

1. 解：920

從給出的兩個情況得知 $(800 - 560)$ 克 $= 240$ 克是水壺裏 $\frac{5}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$ 的水的重量。

$$\therefore \text{水壺裏 } \frac{2}{7} \text{ 的水的重量} = 240 \times \frac{2}{4} \text{ 克} = 120 \text{ 克}$$

$$\therefore \text{當這水壺裝滿了水時，它的重量} = (800 + 120) \text{ 克} = 920 \text{ 克}$$

2. 解：1144；874

設哥哥原有 x 元，則弟弟原有 $(2018 - x)$ 元。

$$\therefore \frac{3x}{4} = 2018 - x - 16$$

$$\frac{3x}{4} + x = \frac{7x}{4} = 2002$$

$$x = 1144$$

而 $2018 - x = 2018 - 1144 = 874$ ，哥哥原有 1144 元，而弟弟原有 874 元。

3. 解：2018

可知五人共消費了 $(2784 + 3051 + 3818 + 3270 + 2785) \div 2$ 元 $= 7854$ 元。

A、B、C 和 D 共消費了 $(2784 + 3818)$ 元 $= 6602$ 元，故 E 消費了 $(7854 - 6602)$ 元 $= 1252$ 元。

A、B、C、E 共消費了 $(3051 + 2785)$ 元 $= 5836$ 元，故 D 消費了 $(7854 - 5836)$ 元 $= 2018$ 元。

A、B、D、E 共消費了 $(2784 + 3270)$ 元 $= 6054$ 元，故 C 消費了 $(7854 - 6054)$ 元 $= 1800$ 元。

A、C、D、E 共消費了 $(2785 + 3818)$ 元 $= 6603$ 元，故 B 消費了 $(7854 - 6603)$ 元 $= 1251$ 元。

B、C、D、E 共消費了 $(3051 + 3270)$ 元 $= 6321$ 元，故 A 消費了 $(7854 - 6321)$ 元 $= 1533$ 元。

$\therefore$ 消費最多的人是 B，而他/她消費了 2018 元。

4. 解：300；330；297

設四年級有學生 n 人，即五年級有學生 $n(1 + 10\%)$ 人，而六年級有學生 $n(1 + 10\%)(1 - 10\%)$ 人。

$$\therefore n + n(1 + 10\%) + n(1 + 10\%)(1 - 10\%) = 927$$

$$n(1 + 1.1 + 1.1 \times 0.9) = 927$$

$$n = 927 \div (1 + 1.1 + 1.1 \times 0.9)$$

$$= 300$$

$\therefore$ 四年級有學生 300 人；五年級有學生 300×1.1 人 $= 330$ 人；六年級有學生 330×0.9 人 $= 297$ 人

5. 解：72

設五個小夥伴身高之和為 n cm。

$$\text{小熊的身高} = [(n - \text{小熊的身高}) \div 2] \text{ cm} = \frac{n}{3} \text{ cm}$$

$$\text{同樣地，小猴的身高} = \frac{n}{4} \text{ cm、小狗的身高} = \frac{n}{5} \text{ cm、小貓的身高} = \frac{n}{6} \text{ cm。}$$

$$\text{小鳥的身高} = (n - \frac{n}{3} - \frac{n}{4} - \frac{n}{5} - \frac{n}{6}) \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$\therefore n(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}) = 18, \text{ 即 } n \times \frac{3}{60} = 18, \text{ 即 } n = 360$$

$$\therefore \text{小狗的身高} = \frac{n}{5} \text{ cm} = \frac{360}{5} \text{ cm} = 72 \text{ cm}$$

6. 解：12

乙做 A 工程的效率比甲的高，而甲做 B 工程的效率比乙的高。因此，乙先做 A 工程，而甲先做 B 工程。

8 天後，A 工程已完成，這時甲、乙二人共同完成餘下的 B 工程。

$$\text{A 工程完成後，B 工程還餘下 } (1 - \frac{8}{15}) = \frac{7}{15}。$$

$$\text{甲、乙二人一天可共同完成 B 工程的 } (\frac{1}{15} + \frac{1}{20}) = \frac{7}{60}$$

$$\therefore \text{甲、乙二人共同完成餘下的 B 工程所需的天數} = \frac{7}{15} \div \frac{7}{60} = 4，$$

$$\therefore \text{甲、乙共同完成這兩項工程最少需要 } (8 + 4) \text{ 天} = 12 \text{ 天。}$$

7. 解：2018

設甲、乙兩人原來的速率分別是 x 和 y 米每小時。

A 地 •

甲 $\rightarrow x$ 米每小時

• B 地

y 米每小時 $\leftarrow$ 乙

× 甲、乙相遇的地方

× 甲、乙提高預定的速率後相遇的地方

甲 $\rightarrow x(1 + 25\%)$ 米每小時

$(y + 504.5)$ 米每小時 $\leftarrow$ 乙

依據預定的速率而行時， $\frac{\text{相遇的地方離A地的距離}}{x} = \frac{\text{相遇的地方離B地的距離}}{y}$ ，即 $\frac{\text{相遇的地方離A地的距離}}{\text{相遇的地方離B地的距離}} = \frac{x}{y}$

依據提高的速率而行時， $\frac{\text{相遇的地方離A地的距離}}{x(1 + 25\%)} = \frac{\text{相遇的地方離B地的距離}}{y + 504.5}$ ，

即 $\frac{\text{相遇的地方離A地的距離}}{\text{相遇的地方離B地的距離}} = \frac{x(1 + 25\%)}{y + 504.5}$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{x(1 + 25\%)}{y + 504.5}$$

$$y + 504.5 = y(1 + 25\%) = 1.25y$$

$$0.25y = 504.5$$

$$y = 2018$$

$\therefore$ 乙預定的速率是 2018 米每小時

8. 解：(a) 504 ; (b) 254520

(a) 扭成的長方形的長度和闊度之和為 $2018 \div 2 \text{ cm} = 1009 \text{ cm}$ ；長方形的闊度的最小值為 1 cm，對應的長度為 1008 cm。

長方形的其它可能的闊度和長度依次為 2 cm 和 1007 cm ; 3 cm 和 1006 cm ; 4 cm 和 1005 cm ; ; 504 cm 和 505 cm。

$\therefore$ 共可扭成 504 個大小不同的長方形。

(b) 其中最大的面積 = $504 \times 505 \text{ cm}^2 = 254520 \text{ cm}^2$

9. 解：700

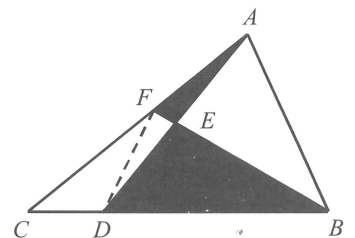
相連 F 和 D 如右圖所示。因 $AE = \frac{1}{2} AD$ ，即 $AE = ED$

$\therefore \triangle BEA$ 的面積 = $\triangle BED$ 的面積，而 $\triangle FEA$ 的面積 = $\triangle FED$ 的面積

$\triangle FBD$ 的面積 = $\triangle FBA$ 的面積 = 300 cm^2

因 $BD = \frac{3}{4} BC$ ，即 $BD = 3CD$ ， $\therefore \triangle FCD$ 的面積 = $\frac{1}{3} \triangle FBD$ 的面積 = 100 cm^2

$\triangle ABC$ 的面積 = $\triangle FBA$ 的面積 + $\triangle FBD$ 的面積 + $\triangle FCD$ 的面積 = $(300 + 300 + 100) \text{ cm}^2 = 700 \text{ cm}^2$



10. 解：2048

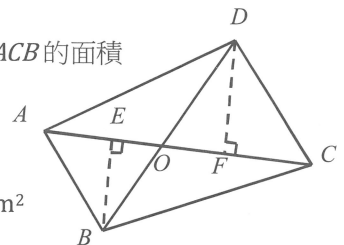
如右圖所示，設這四邊形的對角線為 AC 和 BD 。四邊形 $ABCD$ 的面積 = $\triangle ACD$ 的面積 + $\triangle ACB$ 的面積

$\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times AC \times DF + \frac{1}{2} \times AC \times BE = \frac{1}{2} \times AC \times (DF + BE)$

因直角三角形的斜邊是最長的邊， $BE < BO$ 和 $DF < DO$ 。 $DF + BE < DO + BO = BD$

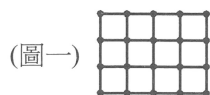
$\therefore$ 四邊形 $ABCD$ 的面積 = $\frac{1}{2} \times AC \times (DF + BE) < \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 64 \times 64 \text{ cm}^2 = 2048 \text{ cm}^2$

這四邊形的面積的最大可能值是 2048 cm^2 。



11. 解：30 個

如圖一所示，邊長為 1 cm 的正方形共有 12 ($= 4 \times 3$) 個；如圖二所示，邊長為 2 cm 的正方形共有 6 ($= 3 \times 2$) 個。



(圖一)



(圖二)

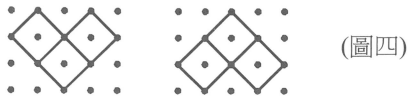
如圖三所示，邊長為 3 cm 的正方形共有 2 ($= 2 \times 1$) 個；



(圖三)

(續前題)

11. 如圖四所示，以 1 cm 邊長的正方形之對角線為邊的正方形共有 $6 (= 3 \times 2)$ 個。



(圖四)

如圖五所示，以 1 cm 邊長的正方形之對角線為邊的正方形共有 $4 (= 2 \times 2)$ 個。



(圖五)

$\therefore$ 構造出的正方形的數目 $= (12 + 6 + 2 + 6 + 4)$ 個 $= 30$ 個

12. 解：9

第 0 次操作後所有的數之和 = 原先寫上的兩個數之和 $= 1 + 2 = 3$ ；

第 1 次操作後所有的數之和 $= 1 + 3 + 2 = 6 = 3 \times 3 - 3$ ；

第 2 次操作後所有的數之和 $= 1 + 4 + 3 + 5 + 2 = 15 = 3 \times 6 - 3$ ；

第 3 次操作後所有的數之和 $= 1 + 5 + 4 + 7 + 3 + 8 + 5 + 7 + 2 = 42 = 3 \times 15 - 3$

細心分析每次寫上新數的過程，除了外側的兩個數被加了一次外，其他的數均被加了兩次，加上原來的數，所以新數之和為原來的數之和的 3 倍少 3 $(= 1 + 2)$ 。

$\therefore$ 第 4 次操作後所有的數之和 $= 42 \times 3 - 3 = 123$ ；

第 5 次操作後所有的數之和 $= 123 \times 3 - 3 = 366$ ；

第 6 次操作後所有的數之和 $= 366 \times 3 - 3 = 1095$ ；

第 7 次操作後所有的數之和 $= 1095 \times 3 - 3 = 3282$ ；

第 8 次操作後所有的數之和 $= 3282 \times 3 - 3 = 9843 < 20170$ ；

第 9 次操作後所有的數之和 $= 9843 \times 3 - 3 = 29526 > 20170$

所以當黑板上的所有的數之和超過 20170 時，這樣的操作最少進行了 9 次。

13. 解：第 2018 項是 $\frac{3}{64}$

首項 $= \frac{1}{2}$ (若分子與分母不同，則下一項的分母不變、分子加 1)

第 2 項 $= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2}$ (若分子與分母相同，則下一項的分母加 1、分子改為 1)

第 3 項 $= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ (若分子與分母不同，則下一項的分母不變、分子加 1)

第 4 項 $= \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$ (若分子與分母不同，則下一項的分母不變、分子加 1)

第 5 項 $= \frac{2+1}{3} = \frac{3}{3}$ (若分子與分母相同，則下一項的分母加 1、分子改為 1)

第 6 項 $= \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

第 7 項 $= \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}$ ；第 8 項 $= \frac{3}{4}$ ；第 9 項 $= \frac{4}{4}$ ；第 10 項 $= \frac{1}{5}$ ；由此類推 ...

因此，對於每個正整數 $n \geq 2$ ，都會有 n 個分母為 n 的分數在此數列中。

為求第 2018 項，需求最大的正整數 m ，使 $2 + 3 + 4 + \dots + m \leq 2018$ 。

因 $2 + 3 + 4 + \dots + 62 = \frac{61(2+62)}{2} = 1952$

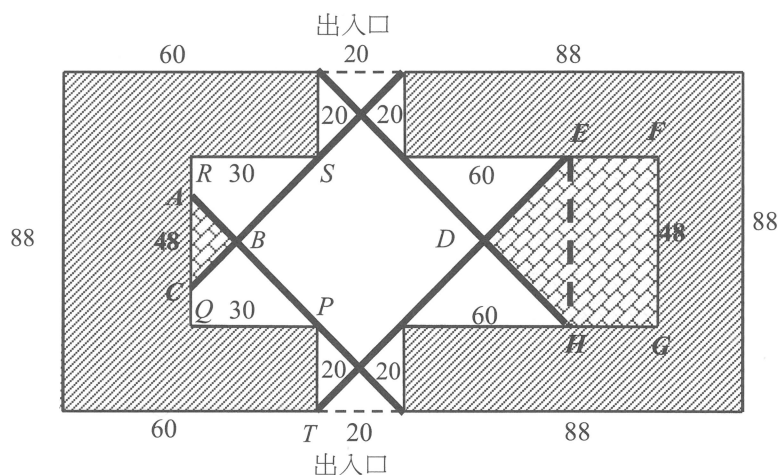
$2 + 3 + 4 + \dots + 63 = \frac{62(2+63)}{2} = 2015$

$2 + 3 + 4 + \dots + 64 = \frac{63(2+64)}{2} = 2079$

$\therefore$ 第 2015 項 $= \frac{63}{63}$ ；第 2016 項 $= \frac{1}{63+1} = \frac{1}{64}$ ；第 2017 項 $= \frac{2}{64}$ ；第 2018 項 $= \frac{3}{64}$

∴ 黃色彈珠的數目 = $100 - 2 - 14 - 32 = 52$ ，即箱子裡有黃色彈珠 52 顆。

15. 解：1188



$\therefore$ 無法被任一個在出入口之路人看見的區域的面積 $= (36 + 576 + 576) \text{ m}^2 = 1188 \text{ m}^2$