

2019 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解：20190000

$$\begin{aligned}2019 \times 13579 - 673 \times 10737 &= 2019 \times 13579 - 673 \times 3 \times 3579 \\&= 2019 \times 13579 - 2019 \times 3579 \\&= 2019 \times 10000 \\&= 20190000\end{aligned}$$

2. 解：3365

$$\begin{aligned}&\frac{2019 \times 2019 + 2692 \times 2692}{3365} \\&= \frac{3 \times 673 \times 3 \times 673 + 4 \times 673 \times 4 \times 673}{5 \times 673} \\&= \frac{9 \times 673 + 16 \times 673}{5} \\&= \frac{25 \times 673}{5} \\&= 5 \times 673 \\&= 3365\end{aligned}$$

3. 解：2

$$\begin{aligned}&\left(27\frac{7}{17} + 17\frac{7}{27} - 11\frac{37}{39}\right) \div \left(13\frac{12}{17} + 8\frac{17}{27} - 5\frac{38}{39}\right) \\&= \left(26\frac{24}{17} + 16\frac{34}{27} - 10\frac{76}{39}\right) \div \left(13\frac{12}{17} + 8\frac{17}{27} - 5\frac{38}{39}\right) \\&= 2 \times \left(13\frac{12}{17} + 8\frac{17}{27} - 5\frac{38}{39}\right) \div \left(13\frac{12}{17} + 8\frac{17}{27} - 5\frac{38}{39}\right) \\&= 2\end{aligned}$$

4. 解：103020

$$\begin{aligned}&2019 \times 1\frac{1}{2019} + 1999 \times 1\frac{1}{1999} + 1979 \times 1\frac{1}{1979} + \cdots + 19 \times 1\frac{1}{19} \\&= 2019 \times \frac{2020}{2019} + 1999 \times \frac{2000}{1999} + 1979 \times \frac{1980}{1979} + \cdots + 19 \times \frac{20}{19} \\&= 2020 + 2000 + 1980 + \cdots + 20 \\&= 20 \times (101 + 100 + 99 + \cdots + 1) \\&= 20 \times \frac{101 \times (101 + 1)}{2} \\&= 103020\end{aligned}$$

5. 解： $\frac{1009}{1111}$

$$\begin{aligned}&0.\dot{2}01\dot{8} \times 9.5 - 0.\dot{6}05\dot{4} \times 1\frac{2}{3} \\&= \frac{2018}{9999} \times 9.5 - \frac{6054}{9999} \times \frac{5}{3} \\&= \frac{2018}{9999} \times 9.5 - \frac{2018}{9999} \times 5 \\&= \frac{2018}{9999} \times (9.5 - 5) \\&= \frac{2018}{9999} \times \frac{9}{2} \\&= \frac{1009}{1111}\end{aligned}$$

6. 解： $408039.\underbrace{777\cdots 78}_{2019 \text{ 個 } 7}$

$$201.8 + 201.98 + 201.998 + \cdots + 201.\underbrace{999\cdots 98}_{2019 \text{ 個 } 9}$$

$$=(202 - 0.2) + (202 - 0.02) + (202 - 0.002) + \cdots + \left(202 - 0.\underbrace{000\cdots 02}_{2019 \text{ 個 } 0}\right)$$

$$=202 \times 2020 - 0.\underbrace{222\cdots 2}_{2020 \text{ 個 } 2}$$

$$=408040 - 0.\underbrace{222\cdots 2}_{2020 \text{ 個 } 2}$$

$$=408039.\underbrace{777\cdots 78}_{2019 \text{ 個 } 7}$$

7. 解： $\frac{1009}{2019}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \cdots + \frac{1}{2018^2-1} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{2017 \times 2019} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2}{2017 \times 2019} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1 \times 3} + \frac{5-3}{3 \times 5} + \frac{7-5}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2019-2017}{2017 \times 2019} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2019} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2019} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2018}{2019} \right) \\ &= \frac{1009}{2019} \end{aligned}$$

8. 解：12

設這四個正整數由小至大依次序分別為 w 、 x 、 y 及 z ，即 $w + x + y + z = 1032$ 。

已知當這四個數由小至大依次序分別被 60、63、66 及 69 除之後所得的商為 a ，且餘數都是 0，則 $w = 60a$ 、 $x = 63a$ 、 $y = 66a$ 及 $z = 69a$ 。

$$\therefore 60a + 63a + 66a + 69a = 1032$$

$$258a = 1032$$

$$a = 4$$

因為 60、63、66、及 69 的最大公因數是 3，

$\therefore$ 得知這四個正整數的最大公因數是 $3 \times 4 = 12$ 。

9. 解：50499

$7^5 = 16807$ ，所以 $a_5 = 7$ ； $7^6 = 117649$ ，所以 $a_6 = 49$ ； $7^7 = 823543$ ，所以 $a_7 = 43$ ； $7^8 = 5764801$ ，所以 $a_8 = 1$ 。

因此， a_n 每 4 個成一循環 7、49、43 和 1。

$$2019 = 504 \times 4 + 3，$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{2019} &= (7 + 49 + 43 + 1) + (7 + 49 + 43 + 1) + \cdots + 7 + 49 + 43 \\ &= 504 \times (7 + 49 + 43 + 1) + 7 + 49 + 43 \\ &= 50499 \end{aligned}$$

10. 解： 47 個

小於 2019 的四位數有 1000、1001、1002、...、2018。

千位數字是 1 而百位數字是 0 的「和諧數」有 1001, 1012, 1023, 1034, ..., 1089 共 9 個

千位數字是 1 而百位數字是 1 的「和諧數」有 1102, 1113, 1124, 1135, ..., 1179 共 8 個

千位數字是 1 而百位數字是 2 的「和諧數」有 1203, 1214, 1225, 1236, ..., 1269 共 7 個

千位數字是 1 而百位數字是 3 的「和諧數」有 1304, 1315, 1326, 1337, ..., 1359 共 6 個

千位數字是 1 而百位數字是 4 的「和諧數」有 1405, 1416, 1427, 1438, 1449 共 5 個

千位數字是 1 而百位數字是 5 的「和諧數」有 1506, 1517, 1528, 1539 共 4 個

千位數字是 1 而百位數字是 6 的「和諧數」有 1607, 1618, 1629 共 3 個

千位數字是 1 而百位數字是 7 的「和諧數」有 1708, 1719 共 2 個

千位數字是 1 而百位數字是 8 的「和諧數」只有 1809

千位數字是 2 而小於 2019 的「和諧數」只有 2002 和 2013

∴ 小於 2019 的四位「和諧數」有 $(9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 + 2)$ 個 = 47 個

11. 解：1953 個

19 至 2019 的整數(包括頭尾兩數)共有 $(2019 - 19 + 1)$ 個 = 2001 個

$4^2 = 16 < 19$, $5^2 = 25 > 19$, 而 $44^2 = 1936 < 2019$, $45^2 = 2025 > 2019$,

∴ 19 至 2019 的整數中(包括頭尾兩數), 完全平方數共有 $(44 - 5 + 1)$ 個 = 40 個

同樣地, $2^3 = 8 < 19$, $3^3 = 27 > 19$, 而 $12^3 = 1728 < 2019$, $13^3 = 2197 > 2019$,

∴ 19 至 2019 的整數中(包括頭尾兩數), 完全立方數共有 $(12 - 3 + 1)$ 個 = 10 個

但 $9^3 = (3^2)^3 = (3^3)^2 = 27^2 = 729$, 而 $4^3 = (2^2)^3 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$,

即在 19 至 2019 的整數中(包括頭尾兩數), 有兩個完全平方數也是完全立方數。

∴ 在 19 至 2019 的整數中(包括頭尾兩數), 不是完全平方數,

也不是完全立方數的共有 $(2001 - 40 - 10 + 2)$ 個 = 1953 個

12. 解： $31\frac{1}{9}$ (也接受 $\frac{280}{9}$)

設這個分數為 $\frac{x}{y}$ 。

$\frac{x}{y} \div \frac{7}{18} = \frac{x}{y} \times \frac{18}{7}$ 是一整數, 而 $\frac{x}{y} \div \frac{40}{63} = \frac{x}{y} \times \frac{63}{40}$ 也是一整數。

∴ x 是 7 和 40 的公倍數, 而 y 是 18 和 63 的公因數。

為使 $\frac{x}{y}$ 的值是最小, x 須是 7 和 40 的最小公倍數, 而 y 須是 18 和 63 的最大公因數。

∴ $x = 280$, 而 $y = 9$, 即這個分數的最小值是 $\frac{280}{9} = 31\frac{1}{9}$

13. 解：3846

設這個四位數為 A , 即 $A = 123x + 33 = 135y + 66$, 其中 x 和 y 依次是 A 除以 123 和 135 時的商。

$A = 123x + 33 = 135y + 66 = 123y + 12y + 66$

∴ $123(x - y) = 12y + 33$, 即 $12y + 33 = 123k$, 其中 k 是一整數

∴ $12y = 123k - 33$, 即 $123k - 33$ 是 12 的倍數

$123k - 33$ 的值依次是 $90(k = 1)$, $213(k = 2)$, $336(k = 3)$, ...,

其中 $336 = 12 \times 28$ 是最小的 12 倍數。

∴ 當 $y = 28$ 時, A 的值是最小, 而 $A = 135 \times 28 + 66 = 3846$

14. 解：2037190

從給出的規律得知第一行有 1 個整數、第二行有 2 個整數、第三行有 3 個整數、...、第 n 行有 n 個整數。

$$\therefore \text{第 2018 行排最尾的整數} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2018 = \frac{2018 \times (1 + 2018)}{2} = 2037171$$

$$\therefore \text{排在第 2019 行的第 1 個整數是 } 2037171 + 1 = 2037172$$

$$\therefore \text{排在第 2019 行的第 19 個整數是 } 2037171 + 19 = 2037190$$

15. 解：2491

設這兩個質數為 A 和 B ，且 $A < B$ 。

$$\text{它們的倒數之和} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$$

$$\therefore A + B = 100$$

A 和 B 的可能性依次為：

$$A = 3 \text{ 及 } B = 97, \text{ 即 } AB = 291 \text{ [註：} A \neq 2, 5, 7, \dots, \text{ 因 } 100 - A \text{ 不是質數]}$$

$$A = 11 \text{ 及 } B = 89, \text{ 即 } AB = 979$$

$$A = 17 \text{ 及 } B = 83, \text{ 即 } AB = 1411$$

$$A = 29 \text{ 及 } B = 71, \text{ 即 } AB = 2059$$

$$A = 41 \text{ 及 } B = 59, \text{ 即 } AB = 2419$$

$$A = 47 \text{ 及 } B = 53, \text{ 即 } AB = 2491$$

$\therefore$ 它們的倒數之和的分母最大值是 2491。