

2023 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

1. 解： $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{2023 \times 2021 + 2022}{2023 \times 4044 - 2} &= \frac{2023 \times (2022 - 1) + 2022}{2023 \times 2022 \times 2 - 2} \\ &= \frac{2023 \times 2022 - 2023 + 2022}{2023 \times 2022 \times 2 - 2} \quad \text{提示：分母 4044 化為 2022 是突破口} \\ &= \frac{2023 \times 2022 - 1}{2 \times (2023 \times 2022 - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. 解：23

$$\begin{aligned} & \left(\frac{23}{1012} + \frac{23}{1013} + \frac{23}{1014} + \dots + \frac{23}{2023} \right) \div \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) \\ &= \left(\frac{23}{1012} + \frac{23}{1013} + \frac{23}{1014} + \dots + \frac{23}{2023} \right) \div \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2023} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} \right) \right] \\ & \quad \text{提示：觀察除法算式第一個括號內分母的特點，及第二個括號內加減交錯} \\ &= \left(\frac{23}{1012} + \frac{23}{1013} + \frac{23}{1014} + \dots + \frac{23}{2023} \right) \div \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} \right) \right] \\ &= \left(\frac{23}{1012} + \frac{23}{1013} + \frac{23}{1014} + \dots + \frac{23}{2023} \right) \div \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1011} \right) \right] \\ &= 23 \times \left(\frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2023} \right) \div \left(\frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2023} \right) \\ &= 23 \end{aligned}$$

3. 解：70

把算式 $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 中的合成數分解為質因數連乘，得出

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = (3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) \times 7 \times (2 \times 3) \times 5 \times (2 \times 2) \times 3 \times 2 \times 1。$$

若要把一些“ $\times$ ”號改寫成“ $\div$ ”號，使最後的計算結果是一個整數，並得出最小值，那麼改寫成“ $\div$ ”號的隨後一個數(或它的質因數連乘)盡可能大，且必需能被被之前或之後的數(或它的質因數連乘)所相約。

$$\begin{aligned} \therefore \text{得出的結果的最小值} &= (3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) \times 7 \div (2 \times 3) \times 5 \div (2 \times 2) \div 3 \times 2 \times 1 \\ & \quad \text{即 } 9 \times 8 \times 7 \div 6 \times 5 \div 4 \div 3 \times 2 \times 1 = 7 \times 5 \times 2 \times 1 = 70 \end{aligned}$$

4. 解：29 999 999 999 999

$2023 = 17 \times 119$ ，即這樣的整數的各個數位上的數字之和是 119。

要這樣的整數取最小值，整個數的數位個數盡可能少，除了最大數位上的數字之外，其餘數位上的數字應全部是 9。

$$119 = 13 \times 9 + 2$$

$$\therefore \text{這樣的整數的最小值} = 29\,999\,999\,999\,999$$

5. 解：20

根據已知的規律，這數列中的數依次是

2、10、5、25、35、40、20、10、5、25、35、40、20、10、5、...

$\therefore$ 可發現從第 2 個數開始，這數列中的數以 10、5、25、35、40 和 20 這六個數依序循環出現。

$$2023 - 1 = 2022 = 6 \times 337$$

因此，數列中的第 2023 個數是六個依序循環出現的最後一個數，即 20。

2023 香港小學數學精英選拔賽
計算競賽題解

6. 解：4721

2 和 3 的 L.C.M. 是 6，而 2、3 和 7 的 L.C.M. 是 42。

從 1 至 42 的 42 個連續整數中，有 21 個 2 的倍數、14 個 3 的倍數和 7 個 6 的倍數；

在刪去 2 和 3 的倍數後，剩下的整數有 14 ($= 42 - 21 - 14 + 7$) 個，而刪去的 2 和 3 的倍數中，有 4 個是 7 的倍數 (即 14、21、28 和 42)。

∴ 如果從 1 至 42 的 42 個連續整數中，刪去 2 和 3 的倍數，但保留 7 的倍數，剩下的整數有 18 ($= 14 + 4$) 個。

基於以上的推論，從 1 開始的連續整數中，每 42 個數中，按要求刪除後剩下的數有 18 個。

$2023 = 18 \times 112 + 7$ ，而在每 42 個數中，剩下的由小到大排列的第 7 個數是原先的第 17 個數 (見下表)。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42								

∴ 剩下的第 2023 個數 $= 42 \times 112 + 17 = 4721$

7. 解：810

三位數 $\overline{abc}$ 是 $100a + 10b + c$ 。

從 $\overline{abc} = 3(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ac})$ ，得知 $100a + 10b + c = 3(10a + b + 10b + c + 10a + c)$
 $= 60a + 33b + 6c$

即 $40a = 23b + 5c$

因為 $40a$ 和 $5c$ 是 5 的倍數，所以 $23b$ 也是 5 的倍數，得出 $b = 5$ 。

當 $b = 5$ ，則有 $40a = 23 \times 5 + 5c$ ，即 $8a = 23 + c$ 或 $c = 8a - 23$ 。

因為 c 的最小值是 1，而最大值是 9，

∴ $23 + 1 = 24 \leq 8a \leq 23 + 9 = 32$ ，得出 $3 \leq a \leq 4$ 。

當 $a = 3$ ， $c = 8 \times 3 - 23 = 1$

當 $a = 4$ ， $c = 8 \times 4 - 23 = 9$

因此，三位數 $\overline{abc}$ 是 351 或 459。

∴ 三位數 $\overline{abc}$ 的所有可能值之和 $= 351 + 459 = 810$

8. 解：13 747

已知 $31^2 = 961 < 1000 < 1024 = 32^2$ ，且 $99^2 = 9801 < 10\,000 = 100^2$ ，所以所有「好數」都是一個兩位數的平方。

因「好數」的個位數字是 9，所以所有「好數」必是以個位數字為 3 或 7 的兩位數之平方。

情況 1：一個以 x 為十位數字，且個位數字是 3 的兩位數之數值是 $10x + 3$ 。

$$(10x + 3)^2 = 100x^2 + 60x + 9 = 100x^2 + 10 \times 6x + 9$$

若這個兩位數是「好數」，它的十位數字是 4，即 $6x$ 的個位數字是 4。

∴ $x = 4$ 或 9 ，而 $43^2 = 1849$ ，且 $93^2 = 8649$

這情況所得的「好數」有 1849 和 8649。

情況 2：一個以 x 為十位數字，且個位數字是 7 的兩位數之數值是 $10x + 7$ 。

$$(10x + 7)^2 = 100x^2 + 140x + 49 = 100x^2 + 10 \times 14x + 49$$

若這個兩位數是「好數」，它的十位數字是 4，即 $(14x + 4)$ 的個位數字是 4。

∴ $14x$ 的個位數字是 0，即 $x = 5$

∴ $57^2 = 3249$

這情況所得的「好數」有 3249。

因此，所有「好數」的總和 $= 1849 + 8649 + 3249 = 13\,747$

~全卷完~