2023 香港小學數學精英選拔賽
數學競賽題解

1. 解：50cm

觀察大等腰梯形的上、下底，可發現其長度分別由若干個小梯形的上、下底的長度組成

等腰梯形的上底 (80 cm)：　3 短底 ＋ 1 長底 … (1)

等腰梯形的下底 (160 cm)：3 長底 ＋ 1 短底 … (2)

(1) ＋ (2) 長底 ＋ 短底 ＝ 60　　(2) − (1) 長底 − 短底 ＝ 40

藉由和、差問題可知　長底 ＝ 50 (cm)　短底 ＝ 10 (cm)

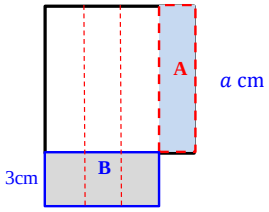
2. 解：81cm²

設原正方形的邊長為 a cm

正方形先向形內縮減 $\frac{1}{4}$ 長方形 A 的面積，等於

再向下延長 3 cm 長方形 B 的面積，∴ $a = 3 \times 3 = 9$

∴ 原正方形的面積為 81 cm²



3. 解：900 分鐘

可知在 1 時、10 時到 20 時前及 21 時的 12 個小時內，電子鐘都顯示着一個或多於一個數字「1」。

這 12 個小時內顯示有數字「1」的時間共有：60 × 12 分鐘 ＝ 720 分鐘

在其他的 12 個小時的每一個小時內，僅有在 1 分、10 分到 20 分前及 21 分、31 分、41 分和 51 分的 15 個分鐘內，電子鐘都顯示着一個或多於一個數字「1」。

因此共有 12 個 15 分鐘，即顯示有數字「1」的時間 ＝ 15 × 12 分鐘 ＝ 180 分鐘 (720 ＋ 180) 分鐘 ＝ 900 分鐘

∴ 這電子鐘在 00：00 至 23：59 這段時間內，總共有 900 分鐘顯示有數字「1」。

4. 解：60 分

以表列方式列出首四位學生的得分如下。

學生	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	總得分
小華	✓	✓	✓	×	65
小薇	×	✓	✓	✓	95
小凱	✓	×	✓	✓	90
小怡	✓	✓	×	✓	80

對首四位學生來說，從上表可知每題恰恰被答對 3 次。

因此，這四題的總分數 $= \frac{65+95+90+80}{3}$ 分 ＝ 110 分

第 4 題的分數 ＝ (110 − 65) 分 ＝ 45 分

第 1 題的分數 ＝ (110 − 95) 分 ＝ 15 分

小妮的總得分 ＝ (45 ＋ 15) 分 ＝ 60 分

5. 解：15 172.5

設五個數 A、B、C、D 和 E 之和為 s，即 A ＋ B ＋ C ＋ D ＋ E ＝ s。

已知 $A = \frac{B + C + D + E}{2}$。

∴ 2A ＝ B ＋ C ＋ D ＋ E、3A ＝ A ＋ B ＋ C ＋ D ＋ E ＝ s，即 $A = \frac{s}{3}$

同樣地，$B = \frac{A + C + D + E}{3}$，即 $B = \frac{s}{4}$；

$C = \frac{A + B + D + E}{4}$，即 $C = \frac{s}{5}$；

$D = \frac{A + B + C + E}{11}$，即 $D = \frac{s}{12}$；

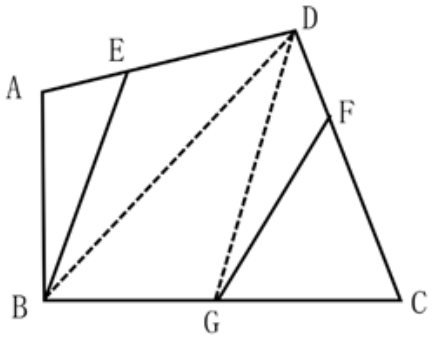
已知 $E = 2023 = s - A - B - C - D = s - \frac{s}{3} - \frac{s}{4} - \frac{s}{5} - \frac{s}{12} = s\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{12}\right)$

∴ $s = 2023 \div \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{12}\right) = 2023 \div \frac{60 - 20 - 15 - 12 - 5}{60} = 2023 \div \frac{8}{60} = 2023 \times \frac{15}{2}$

即五個數 A、B、C、D 和 E 之和 ＝ $2023 \times \frac{15}{2} = 15\,172.5$

6. 解：36cm^2

如右圖所示，相連 BD 和 DG。



因 DE ＝ 2AE、ΔBDE 的面積 ＝ $2\times\Delta$ABE 的面積

$= 2\times 6\text{ cm}^2 = 12\text{ cm}^2$

因 CF ＝ 2FD、ΔDFG 的面積 ＝ $\frac{1}{2}\times\Delta$CFG 的面積

$= \frac{1}{2}\times 12\text{ cm}^2 = 6\text{ cm}^2$

因 BG ＝ CG，ΔBDG 的面積 ＝ΔCDG 的面積

＝ΔCFG 的面積 ＋ΔDFG 的面積

$= 12\text{ cm}^2 + 6\text{ cm}^2 = 18\text{ cm}^2$

∴ 五邊形 BGFDE 的面積 ＝ΔBDE 的面積 ＋ΔBDG 的面積 ＋ΔDFG 的面積

$= 12\text{ cm}^2 + 18\text{ cm}^2 + 6\text{ cm}^2$

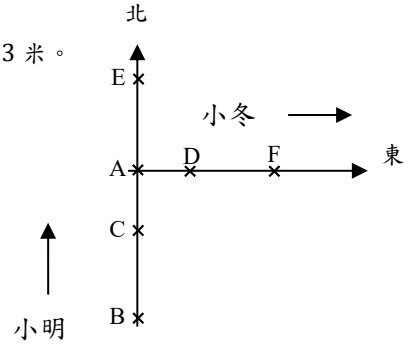
$= 36\text{ cm}^2$

7. 解：小明跑步的均速是 12.24 km/h

小冬步行的均速是 5.1 km/h

因小明和小冬與城 A 的距離在兩個不同的時間都相等，則小明在較早的時間(開始跑步後的 7 分鐘)是在城 A 的南邊，而在較後的時間(開始跑步後的 17 分鐘)是在城 A 的北邊。

下圖展示小明和小冬在開始跑步/步行後兩個不同時間的位置，而 AB ＝ 2023 米。



小明在開始跑步後的 7 分鐘，他在點 C，而小冬在點 D，則 AC ＝ AD，且在這 7 分鐘內，小明和小冬共前進了的距離 ＝ BC ＋ AD ＝ BC ＋ AC ＝ AB ＝ 2023 米

設小明跑步的均速為 v_1 米每分鐘，而小冬步行的均速為 v_2 米每分鐘。

$\therefore 7(v_1+v_2)=2023$，則 $v_1+v_2=289$ …… (1)

小明和小冬繼續前進 10 分鐘 (即在小明開始跑步後的 17 分鐘)，小明在點 E，而小冬在點 F，則 AE ＝ AF。

在 17 分鐘內，小明跑步的距離 ＝ BE，小冬步行的距離 ＝ AF，

兩人前進距離的相差 ＝ BE − AF ＝ BE − AE ＝ AB ＝ 2023 米

$\therefore 17(v_1-v_2)=2023$，則 $v_1-v_2=119$ …… (2)

方程 (1) 加方程 (2)，得 $2v_1=408$，即 $v_1=204$ 和 $v_2=85$。

小明跑步的均速 ＝ $204\times\frac{60}{1000}\text{ km/h} = 12.24\text{ km/h}$

小冬步行的均速 ＝ $85\times\frac{60}{1000}\text{ km/h} = 5.1\text{ km/h}$

8. 解：21 種

先把八個球分成六份，每份至少有一個球。

第一種分法：1、1、1、1、1 和 3

把這六份放入六個不同的盒子共有 6 種方法，因為有 3 個球的一份可放入六個不同的盒子中的任何一個，餘下的五個盒子則各放入一個球，怎樣放都是一樣的。

第二種分法：1、1、1、1、2 和 2

把各有兩球的兩份放入六個不同盒子中的兩個，共有多少種方法？我們可以這樣作出推論。

從六個不同盒子中選取兩個，不同的組合有 $(6\times5)\div2=15$ 種。這些不同的組合可詳列如下(把六個不同盒子標示為 A、B、C、D、E 和 F)：

AB　BC　CD　DE　EF
AC　BD　CE　DF
AD　BE　CF
AE　BF
AF

餘下的四個盒子則各放入一個球，怎樣放都是一樣的。

AB 和 BA、BC 和 CB、…等都是同一組合因為它們都是裝著兩個球！

∴共有 (6 + 15) 種，即 21 種不同的擺放方法。

9. 解：6 種

假設第一天共有 n 位學生點了炒飯，可知 $n \geq 8$，因為題目說「隔天，其中的 8 位學生再度到同一餐廳點了炒飯」。

在第一天，這 n 位學生的每一位吃了 $\frac{15}{n}$ 碟炒飯，而在第二天點了炒飯的每一位學生吃了 $\frac{15}{2n}$ 碟炒飯，故八位學生一共吃了 $\frac{15}{2n} \times 8 = \frac{60}{n}$ 碟炒飯。

$\therefore \frac{60}{n} = x$，其中 x 為一整數，且 $n \geq 8$

因此，n 是 60 的因數，且 $n \geq 8$。因為 60 的因數中，大於 8 的有 10、12、15、20、30 和 60 這六個因數，所以第二天他們總共吃的炒飯碟數共有 6 種可能性：$\frac{60}{10} = 6$、$\frac{60}{12} = 5$、$\frac{60}{15} = 4$、$\frac{60}{20} = 3$、$\frac{60}{30} = 2$ 和 $\frac{60}{60} = 1$。

10. 解：7 次

採取逆向推算的方式，「加 2」的逆向推算是「減 2」，而「乘 2」的逆向推算是「除以 2」。

因開始時輸入的數是 2，故此可判斷出每按一次運算鍵，運算後螢幕上出現的數必是偶數。

實際上，運算後螢幕上出現的數必是 4 的倍數或 4 的倍數加 2。

因此，從 100 開始，依逆向推算回到 2，為了避免螢幕上出現奇數，有以下逆向推算規則：

- 螢幕上出現的數是 4 的倍數時，則除以 2 或減 2
- 螢幕上出現的數是 4 的倍數加 2 時，則減 2

為使按運算鍵最少次，則要除以 2 的運算盡量多。從 100 開始，得出的逆向推算如下：

(1) $100 = 4 \times 25$ 是 4 的倍數，所以除以 2 得 50；

(2) $50 = 4 \times 12 + 2$ 是 4 的倍數加 2，所以減 2 得 48；

(3) $48 = 4 \times 12$ 是 4 的倍數，所以除以 2 得 24；

(4) $24 = 4 \times 6$ 是 4 的倍數，所以除以 2 得 12；

(5) $12 = 4 \times 3$ 是 4 的倍數，所以除以 2 得 6；

(6) $6 = 4 \times 1 + 2$ 是 4 的倍數加 2，所以減 2 得 4；

(7) 4 除以 2 得 2　或　4 減 2 得 2，兩者皆可以。

因此，按運算鍵的最少次數是 7 次，而從 2 開始，按運算鍵的次序是

B、A、B、B、B、A、B，即 $[(2 \times 2 + 2) \times 2 \times 2 \times 2 + 2] \times 2 = 100$

或　A、A、B、B、B、A、B，即 $[(2 + 2 + 2) \times 2 \times 2 \times 2 + 2] \times 2 = 100$

~全卷完~